



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی	؟؟ خرداد ۱۳۹۴
تمرین سری هفتم	
مدرس: مهدی جعفری	موعد تحویل: ؟؟ خرداد ۱۳۹۴

۱- یک متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در بازه $[-2, +2]$ است. اگر Y و Z به فرم زیر تعریف شده باشند، توزیع احتمالی $W = ZY$ را به دست آورید.

$$Y = 1 - X^2$$

$$Z = \ln(X)$$

۲- زیست شناسان دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند، در طی مطالعه ای اخیر بر روی جمعیت پرندگان آشوراده نسبت پرندگان ماده در این جمعیت را 55 درصد تخمین زده اند. با فرض درست بودن این تخمین، حداقل چند نمونه از این جمعیت را نیاز داریم تا با احتمال حداقل 0.9، درصد تعداد ماده ها برابر با 50 باشد؟

۳- مرکز سلامت ایران، میانگین وزن افراد بالغ را $75kg$ با انحراف معیار $13kg$ گزارش داده است. با توجه به این اطلاعات به سوالات زیر پاسخ دهید.

□ الف) احتمال این که وزن یک فرد بالغ تصادفی بیشتر از $86kg$ باشد، چقدر است؟

□ ب) 25 فرد بالغ را به طور تصادفی انتخاب می کنیم. احتمال این که میانگین وزن آن ها بیشتر از 2 تن باشد، چقدر است؟

□ ج) ظرفیت آسانسور CE برابر با 800 کیلوگرم است، اگر 11 فرد تصادفی وارد آسانسور شوند، احتمال این که مجموع وزن آن ها از حد مجاز بیشتر شود چقدر است؟

۴- فوتونی که در مرکز یک ستاره بر اثر جوش هسته ای تولید می شود، برای رسیدن به سطح و تابیده شدن، مسیر طولانی ای باید طی کند، چرا که به طور مداوم به ذرات داخل ستاره برخورد می کند، جذب می شود و بازتابیده می شود. اگر جهت این باز تابیده شدن (زاویه آن) یک متغیر تصادفی یکنواخت بین $[0, 2\pi]$ و میانگین طول طی شده بین هر بار جذب و باز تابیده شدن تا جذب بعدی l باشد، میانگین مدت زمانی که طول می کشد یک فوتون از مرکز خورشید به سطح آن برسد را حساب کنید. این فوتون به طور میانگین چند بار جذب و بازتابیده شده است؟ حرکت فوتون را برای سادگی دو بعدی فرض کنید. (تصویر در صفحه بعد)

$$\text{شعاع خورشید} = 6.96 \cdot 10^7 m$$

$$\text{سرعت نور} = 3.10^8 m/s$$

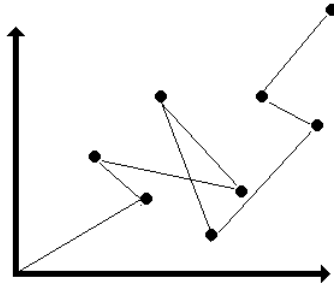
$$l = 10^{-3} m$$

۵- فرض کنید $Z = \min(X, Y)$ و $W = \max(X, Y)$:

الف- اگر X دارای توزیع نمایی با پارامتر α و توزیع Y نیز نمایی با پارامتر β ($\alpha \neq \beta$) و X و Y مستقل باشند، تابع چگالی مشترک Z و W و توابع چگالی حاشیه ای Z و W را محاسبه کنید.

ب- اگر X دارای توزیع پواسون با پارامتر α و توزیع Y نیز نمایی با پارامتر β و X و Y مستقل باشند، تابع احتمال مشترک Z و W را به دست آورید.

۶- نشان دهید کران بالای نامساوی $markov$ دقیق است. یعنی یک متغیر تصادفی X تعریف کنید که باعث شود در نامساوی $markov$ حالت تساوی رخ دهد. سپس امید ریاضی X پیشنهادی خود را محاسبه کرده و درباره درستی پاسخ خود به صورت خلاصه توضیح دهید.



شکل ۱: یک نمونه از مسیر حرکت تصادفی یک فوتون

۷- دو تاس با رنگ های سبز و آبی به شما داده شده است. هر دو تاس عادلانه هستند یعنی هر کدام از آن ها پس از پرتاب با احتمال برابر روی هر کدام از وجه هایش قرار می گیرند. روی وجه های تاس سبز اعداد 1, 1, 3, 3, 6, 6 و روی تاس آبی اعداد 3, 3, 3, 4, 6, 6 نوشته شده است. فرض کنید X متغیر تصادفی ای باشد که مقدارش برابر با مجموع اعداد تاس سبز و آبی پس از پرتاب باشد، به سوالات زیر پاسخ دهید.

□ الف) $E[X]$ را محاسبه کنید.

□ ب) $Var(X)$ و انحراف معیار آن را محاسبه کنید.

□ ج) اگر از نابرابری *markov* برای متغیر تصادفی X استفاده کنیم برای $P(X \geq 5)$ چه کران بالایی به ما می دهد؟

□ د) اگر در قسمت (ج) به جای *markov* از نابرابری چبیشف استفاده کنیم، چه کران بالایی به دست می آید؟ آیا این نابرابری بهتر از نابرابری قسمت (ج) است؟

۸- برای ارسال مطمئن هر بیت 0 و 1، هر بیت را $n = 13$ بار پیاپی ارسال می کنیم و در گیرنده اگر تعداد یک های دریافتی بیشتر بود پیغام را 1 و اگر تعداد صفرهای دریافتی بیشتر بود پیغام را 0 تلقی می کنیم. اگر احتمال خطا در هر بیت $p = 0.1$ باشد، کران چرنوف برای احتمال خطا را به دست آورده و آن را با آن چه در قانون اعداد بزرگ (از طریق قضیه چبیشف) می بینیم، یعنی $\{|\bar{X} - \mu| > \epsilon\} < \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$ مقایسه کنید.

۹- یک کابل انتقال برق تضعیف نامی $\delta \text{ dB/km}$ با واریانس $d^2 \text{ (dB/km)}^2$ ایجاد می کند. dB به فرم $20 \log(P/P_0)$ تعریف می شود که در آن P توان در لحظه مشاهده، P_0 توان اولیه و \log لگاریتم مبنای ۱۰ است. (این تعریف هیچ ربطی به حل سوال ندارد)
 الف- پیدا کنید تضعیف این کابل با طول 100 km به احتمال 1% و به احتمال 99% از چه مقداری بیشتر خواهد بود؟
 ب- اگر بخواهیم احتمال آن که تضعیف کابل با طول ۱۰۰ کیلومتر بیش از Δ شود حداکثر 0.1% باشد و مقدار تضعیف نامی همان $\delta \text{ dB/km}$ باشد، حداکثر واریانس مجاز چقدر خواهد بود؟

موفق باشید