

۱۳۹۴ فروردین	آمار و احتمال مهندسی
تمرین سری چهارم	
موعده تحویل: ۲۹ فروردین ۱۳۹۴	مدرس: مهدی جعفری

۱- رالف خرابکار به تازگی خانه‌ای خریده است که دارای یک پلکان مرمری با n تا پله است. از آنجایی که خرابکاری در ذات رالف است، تصمیم گرفته است از پله اول شروع کرده و تا پله آخر بالا برود و در تعدادی خانه به تصادف بمب کار بگذارد! برای هر پله، احتمال این که رالف در آن خانه بمب بگذارد برابر p است.
الف) اگر بمبها طوری باشند که هر بمب فقط پله مربوط به خودش را منفجر کند، امید ریاضی تعداد خانه‌هایی که منفجر خواهند شد چقدر است.

ب) اگر هر بمب علاوه بر خودش، خانه‌های مجاور را هم منفجر کند، امید ریاضی تعداد خانه‌هایی که منفجر می‌شوند را محاسبه کنید.
ج) فرض کنید زیر تعدادی از پله‌ها گنج مخفی شده است، به طوری که دارایی زیر پله d ام که با $C(d)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر باشد:

$$C(d) = \begin{cases} 0 & d \nmid n \\ \frac{\phi(d)}{p^{\phi(d)}} & d \mid n \end{cases}$$

که $\phi(d)$ برابر تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از d است که نسبت به آن اول هستند. هم‌چنین می‌دانیم رالف تعدادی بمب هوشمند پیدا کرده است که اینطور عمل می‌کنند: چنانچه بمبی در خانه k ام کار گذاشته شود، هر پله با شماره i که $i \geq k$ و $(k, i) = 1$ باشد منفجر خواهند شد. فرض کنید رالف از خانه اول شروع کرده و یکی یکی خانه‌ها را بالا می‌رود و در هر خانه با احتمال $1-p$ بمب کار می‌گذارد. پس از منفجر شدن همه بمبها، فلیکس که عادت دارد خرابکاری‌های رالف را درست کند، تک تک پله‌هایی که منفجر نشده‌اند را بررسی می‌کند و پولی که زیر آنها مخفی شده است را جمع می‌کند تا با آن‌ها پله‌های خانه رالف را بازسازی کند. امید ریاضی مقدار پولی که فلیکس پیدا می‌کند را محاسبه کنید. (از اتحاد $\sum_{d|n} \phi(d) = n$ استفاده کنید.)

۲- به تازگی باغی پر از هویج به شما داده شده است که به صورت یک جدول 15×15 است و در هر خانه آن یک هویج قرار دارد. از آنجایی که تحریم‌ها برداشته شده‌اند، تعداد زیادی خرگوش وارد کشور شده‌اند و یکی از آنها به سراغ مزرعه شما آمده است و ۵ تا از هویج‌های شما را خورده است. پس از شکایت شما به سازمان ملل، سه نماینده از این سازمان آمده‌اند تا خسارت وارده بر شما را محاسبه کنند.
الف) نماینده اول برای هر مربع دو در دویی که پر از هویج باشد به شما ۳ دلار می‌دهد.

ب) نماینده دوم برای هر مربع سه در سه که پر از هویج باشد ۵ دلار به شما می‌دهد و برای هر مربع دو در دو که همه هویج‌هایش خورده شده باشد از شما ۴ دلار می‌گیرد.

ج) نماینده سوم برای هر سطری که همه خانه‌هایش حاوی هویج باشند ۱۰ دلار به شما می‌دهد.
شما حق دارید یکی از این سه نماینده را انتخاب کنید تا خسارت وارده به شما را برآورد کند. کدام را انتخاب می‌کنید؟ (برای این کار منطقی است امید ریاضی خسارتی که هر کدام محاسبه می‌کنند را بدست آورید و آن نماینده‌ای را انتخاب کنید که امید ریاضی مربوط به آن بزرگتر است.)

۳- الف) سه واقعه را در نظر بگیرید:

واقعه اول: عدد تاس انداخته شده زوج باشد.

واقعه دوم: عدد تاس انداخته شده مضرب سه باشد.

واقعه سوم: عدد تاس انداخته شده مضرب پنج باشد.

آیا واقعه اول و دوم مستقلند؟ واقعه دوم و سوم چطور؟ واقعه سوم و اول چطور؟ (از روابط استقلال پاسخ دهید)

ماهیت هر سه واقعه یک چیز هستند، اما همان‌طور که دیدید بعضی مستقلند و بعضی نه! برای آن چه توجیهی دارید؟

ب) فرض کنید دو جعبه جلوی شما قرار داده شده است و به شما گفته شده است در هر کدام مقداری پول است. هم‌چنین شما می‌دانید پول موجود در یک جعبه دوبرابر دیگری است ولی نمی‌دانید این جعبه کدام است. از شما خواسته شده است جعبه‌ای را بردارید تا پول درون آن مال شما باشد. شما انتخاب خود را انجام داده‌اید و درون جعبه را باز کرده‌اید و دیده‌اید در این جعبه ۱۰۰ تومان پول است. حال به شما این امکان را می‌دهند که اگر می‌خواهید جعبه خود را با جعبه دیگر عوض کنید. آیا این کار را می‌کنید؟ (برای تصمیم‌گیری در این مورد منطقی است امید ریاضی پولی که با تعویض جعبه به دست می‌آورید را محاسبه کنید.)

حال اگر در جعبه به جای ۱۰۰ تومان ۲۰۰ تومان پول بود چطور؟ اگر مقدار پول درون جعبه را x بنامیم، با توجه به محاسبات شما منطقی است جعبه خود را عوض کنید یا نه؟ آیا این نتیجه می‌دهد از ابتدا جعبه‌تان را (حتی قبل از بازکردنش) عوض کنید؟

۴- فرض کنید X متغیر تصادفی پواسون با نرخ λ باشد. با استفاده از تعریف امید ریاضی، مقدار $E(X)$ و $E(X^2)$ را محاسبه کنید. با استفاده از دو مقدار اخیر مقدار $Var(X)$ را نیز محاسبه کنید.

۵- جک دیوانه به تازگی از زندان فرار کرده است و روبه‌روی دیوار پشتی زندان تفنگ شات گانی پیدا کرده است که تعداد نامحدودی تیر دارد! او که بسیار از آزادی خود خوشحال است پاک به سرش زده و تفنگ را برداشته و بی وقفه شروع به تیراندازی کردن به دیوار زندان می‌کند. دیوار به‌صورت یک مربع 50×50 است و احتمال اینکه تیر رها شده از تفنگ جک به خانه (i, j) بخورد برابر با $\frac{ij}{100}$ است. امید ریاضی تعداد خانه‌هایی که تیر می‌خورند را محاسبه کنید.

۶- الف) فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد که تنها مقادیر طبیعی را می‌گیرد. ثابت کنید

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i)$$

ب) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی هستند. برای هر $y \in Y$ می‌توان به $E(X|Y=y)$ به چشم یک تابع از y نگاه کرد. بنابراین می‌توان از این تابع برحسب y امید ریاضی گرفت! این امید ریاضی را با $E(E(X|Y))$ نشان می‌دهیم. نشان دهید:

$$E(E(X|Y)) = E(X)$$

۷- فردی ۳۰ سنگ را به سمت ۱۰ قوطی پرتاب می‌کند. می‌دانیم احتمال افتادن هر سنگ در هر قوطی $\frac{1}{10}$ است و سنگ‌ها مستقل از یکدیگر عمل می‌کنند. امید ریاضی تعداد قوطی‌های خالی را به دست آورید.

۸- روزهایی که فسقلی از خانه به مدرسه پیاده می‌رود، مجبور است از یک خیابان خاص رد شود. مادر فسقلی به او گفته است برای این که بتواند از خیابون رد شود، باید صبر کند و یک فاصله ی ۱۵ ثانیه‌ایی بین ماشین‌ها پیدا کرده و سپس اقدام به رد شدن نماید. فرض کنید تعداد ماشین‌هایی که در یک لحظه در آن نقطه از خیابان عبور میکنند، از یک توزیع پواسون پیروی میکنند و به علاوه فرض کنید میانگین زمان بین دو ماشین عبوری ۷ ثانیه باشد. امید ریاضی مدت زمانی که فسقلی منتظر می‌ماند تا بتواند از خیابان رد شود را محاسبه کنید.

۹- فردی میخواهد یک منبع درآمد برای خودش دست و پا کند! او بازی‌ای طراحی کرده است، بازی او به این شکل است که اول باید هزار تومان پول بدهید تا بتوانید بازی کنید. پس از آن، سه تاس منصفانه (تاسی که احتمال رو آمدن همه وجه‌هایش برابرند) برمی‌دارید و پرتاب می‌کنید. اگر یکی از این تاس‌ها شش بیاید، دو هزار تومان جایزه می‌گیرید. اگر دو تا از تاس‌ها شش بیاید، سه هزار تومان جایزه می‌گیرید. و در نهایت اگر هر سه تاس شش بیاید، چهار هزار تومان جایزه خواهید گرفت. اگر تعداد افرادی که در یک روز پیشنهاد انجام بازی را قبول کرده از توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = 10$ پیروی کند، میانگین درآمد ماهیانه‌ی این فرد چقدر است؟

۱۰- در شهری n تاکسی وجود دارد. فردی هر روز برای رفتن به خانه به طور تصادفی یک تاکسی می‌گیرد. به طور متوسط، چند روز طول می‌کشد تا این فرد بتواند ادعا کند که سوار همه‌ی تاکسی‌های شهر شده است؟

موفق باشید