

تمرین سری اول

موعد تحویل: شنبه ۱۰ اسفند ۱۳۹۲

مدرس: مهدی جعفری

۱- نشان دهید:

- $P(A) = P(B) = P(AB) \Rightarrow P(\overline{A\overline{B}} \cup \overline{A\overline{B}}) = 0$
- $(A^c \cup B^c)^c \cup (A^c \cup B)^c = A$ ,
- $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ ,
- $[A \cap (B \cup C)]^c = (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c)$ .

۲- محمد و مبین تصمیم گرفته‌اند بازی هیجان‌انگیز «دارت» رو به صورت رسمی از امروز آغاز کنند. صفحه دارت به صورت یک دایره با شعاع برابر با ۵۰ سانتی‌متر است. اگر یک تیر به فاصله ۵ سانتی‌متری مرکز دارت بخورد، پرتاب‌کننده ۵۰ امتیاز، اگر تیر در فاصله بین ۵ تا ۱۵ سانتی‌متری مرکز بخورد، ۳۰ امتیاز، اگر تیر در فاصله بین ۱۵ سانتی‌متری تا ۲۵ سانتی‌متری بخورد، ۲۰ امتیاز و اگر با فاصله بیش‌تر از ۲۵ (ولی بالطبع داخل صفحه دارت!) بخورد ۱۰ امتیاز می‌گیرد. فرض کنید محمد و مبین به اندازه‌ی کافی خفن هستند که تیرهایشان حداقل داخل صفحه بخورد! مبین تیرهایش به صورت یک‌نواخت در نقاط روی سطح صفحه‌دارت با احتمال برابر برخورد می‌کند. (یعنی احتمال برخورد تیر او در هر ناحیه با مساحت آن ناحیه متناسب است.)

□ الف) احتمال آن‌که مبین با یک پرتاب ۵۰ امتیاز بگیرد چقدر است؟

□ ب) احتمال آن‌که مبین با یک پرتاب ۳۰ امتیاز بگیرد چقدر است؟

□ ج) محمد «راست دست» است و به همین علت احتمال آن‌که تیرهایش به سمت راست صفحه برخورد کند دو برابر سمت چپ است (نسبت به محور عمودی گذرنده از مرکز صفحه دارت). حال اگر بدانیم در هر نیمه احتمال برخورد تیر در همه نقاط به صورت یک‌نواخت تقسیم شده و متناسب با مساحت آن است، قسمت‌های الف و ب را برای یک پرتاب محمد حساب کنید!

۳- در یکی از اتاق‌های پر آذوقه از خوابگاه «طرشت»،  $n$  نفر دمپایی‌های خود را (فرض - محال - کنید به صورت جفت شده!) جلوی در درآورده‌اند. سپس آخر شب - پس از شام - هر کدام از این  $n$  نفر به صورت تصادفی یک جفت دمپایی را پا کرده و به اتاق خود باز می‌گردند. (پس احتمال وقوع هر رخدادی از رسیدن دمپایی‌ها به افراد با هم برابر است.) حال احتمال موارد زیر را محاسبه کنید:

□ الف) هر کدام از دانشجویان همان دمپایی خود که با آن آمده بودند را پا کرده باشند.

□ ب)  $m$  نفر اول که زودتر به اتاق‌های خود برگشته‌اند با دمپایی خود برگشته باشند. (بقیه ممکن است با دمپایی خود یا دیگران بازگشته باشند!)

□ ج)  $m$  نفر اول که زودتر به اتاق‌های خود برگشته‌اند، دمپایی  $m$  نفر آخری که به اتاق خود بازگشته‌اند را پوشیده باشند.

حال فرض کنید هر کدام از دمپایی‌ها به علت رفت و آمد به احتمال  $p$  خاکی شده باشد. اگر همه موقع انتخاب دمپایی به خاکی بودن آن توجه نکنند و مستقل از آن - درست مثل حالت قبل - به صورت تصادفی یک‌دمپایی را انتخاب کنند، احتمال‌های زیر را محاسبه کنید:

□ چ) احتمال آن‌که  $m$  نفر اول با دمپایی تمیز بازگردند.

□ ح) احتمال آن‌که دقیقاً  $m$  نفر با دمپایی خاکی بازگردند.

۴- هفته پیش هادی خودکارش را در دانشگاه گم کرده است. طبق اظهارات خودش، به احتمال  $\frac{3}{10}$  خودکار او جلوی دانشکده مکانیک و به احتمال  $\frac{7}{10}$  جلوی دانشکده عمران افتاده است. اگر خودکار هادی جلوی دانشکده مکانیک باشد و هادی در یک روز از طلوع تا غروب آفتاب آن جا را بگذرد، به احتمال  $\frac{45}{100}$  آن را پیدا می کند. به همین ترتیب اگر خودکارش جلوی دانشکده عمران باشد و هادی یک روز از طلوع تا غروب آفتاب آن جا را بگذرد، به احتمال  $\frac{2}{10}$  آن را پیدا می کند. از آن جایی که شریف جای «امنی» است. خودکار هادی را کسی بر نمی دارد (البته ممکن است خودش نتواند خودکار را پیدا کند!). هادی درس و زندگی‌اش را رها کرده و هر روز از لحظه طلوع آفتاب جلوی یکی از دانشکده ها را انتخاب کرده و تا لحظه غروب آفتاب آن جا را می گردد.

□ الف) با هدف بیشینه کردن احتمال آنکه خودکارش را پیدا کند. در روز اول هادی باید جلوی کدام دانشکده را بگذرد؟ (ادعای خود را اثبات کنید!)

□ ب) اگر بدانیم هادی روز اول جلوی دانشکده عمران را گشته و خودکارش را پیدا نکرده است، احتمال آن که خودکار او جلوی دانشکده عمران باشد چقدر است؟

□ ج) حال فرض کنید مبین هر روز یک سکه عادلانه می اندازد و اگر شیر آمد هادی را به جلوی دانشکده عمران فرستاده و اگر خط آمد او را جلوی دانشکده مکانیک می فرستد تا دنبال خودکار خود بگذرد، اگر بفهمیم هادی خودکارش را در روز اول پیدا کرده است، احتمال آن که هادی جلوی دانشکده عمران را گشته باشد چقدر است؟

□ چ) فرض کنید خدایی نکرده در دانشگاه دزدی پیدا شده باشد و اگر هادی تا روز  $n$ م خودکارش را پیدا نکرده باشد، آن شب «دزد خودکار» به احتمال  $\frac{n}{n+2}$  خودکار را بدزد. حال احتمال آن که هادی سه روز اول را جلوی دانشکده مکانیک بگذرد و در روز سوم خودکارش را پیدا کند، چقدر است؟

۵- سه سکه درون یک جعبه قرار دارند، سکه اول متقارن، سکه دوم هر دو رویش شیر و سکه سوم در  $\frac{2}{3}$  اوقات شیر می آید. یکی از سکه را به صورت تصافی انتخاب کرده ایم. آن را می چرخانیم، در صورتی که شیر مشاهده شود، احتمال آن که سکه انتخاب شده، سکه‌ی اول باشد چقدر است؟

۶ - موربیتی شرور شرلوک هلمز را به یک بازی جدید دعوت کرده است. بازی به این ترتیب است که موربیتی یک تفنگ با رول شش گلوله‌ای دارد. که داخل آن دو گلوله قرار داده است. در شلیک اول هیچ گلوله‌ای از تفنگ خارج نشده است. حال برای شلیک دوم او به شرلوک این حق انتخاب را داده است که یکی از دو حالت زیر را انتخاب کند:  
- موربیتی شلیک دوم را بدون چرخاندن رول تیرها انجام دهد.  
- موربیتی ابتدا رول تیرها را به صورت تصادفی بچرخاند (که ممکن است به مقدار دلخواه، طی آن رول تیرها بچرخد. مثلاً ۲ دور کامل و دو جایگاه گلوله) و سپس یک تیر شلیک کند. حال برای این که شرلوک شانس زنده ماندن خود را بیشینه کند، در هر کدام از حالت‌های زیر باید کدام روش را انتخاب کند؟

□ الف) در صورتی که بداند موربیتی هر دو تیر را در دو جایگاه کنار هم قرار داده است.

□ ب) در صورتی که بداند موربیتی تیرها را به صورت کاملاً تصادفی داخل رول قرار داده است.

۷- به یک میمون آزمایشگاهی یک مکعب روبیک به هم ریخته شده داده شده است. این میمون در هر مرحله یک حرکت تصادفی از بین حرکات موجود انجام میدهد. چقدر احتمال دارد در مرحله ای میمون موفق شود مکعب را درست کند؟

۸- سه زندانی توسط زندانبان مطلع شده اند که یکی از آن ها به طور تصادفی محکوم به اعدام شده و دو نفر دیگر تنها به جزای نقدی محکوم شده اند. زندانی اولی به زندانبان می گوید که چون می داند دست کم یکی از دو زندانی دیگر محکوم به اعدام نشده اند، اگر زندانبان به او بگوید که کدام یک از دو زندانی دیگر فرد مورد نظر است، اطلاعات اضافی به او نداده است.  
زندانبان به این پرسش پاسخ نمی دهد و ادعا می کند که اگر زندانی اولی بداند کدام یک از دو زندانی دیگر اعدام نخواهند شد، آنگاه احتمال اعدام شدن زندانی اولی افزایش خواهد یافت. آیا شما با این استدلال موافقت می کنید؟ لابلچرا؟ اگر این احتمال تغییر می کند میزان تغییرات آن را به دست آورید.  
مقدار  $P(A \triangle B \triangle C)$  را بیابید.

۹- فرستنده ای داریم که با احتمال برابر ۰ و ۱ تولید میکند، اگر  $X(n)$  نشان دهنده ظاهر نشدن سه ۱ بطور متوالی در ارسال یک رشته  $n$  بیتی باشد، آنگاه نشان دهید رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} 8X(n) - 4X(n-1) - 2X(n-2) - X(n-3) &= 0 \\ X(0) &= 1 \\ X(1) &= 1 \\ X(2) &= 1 \end{aligned}$$

۱۰- اگر  $0 \leq x_i \leq 1$  که  $(i = 1, 2, \dots)$  آنگاه با یک راه حل احتمالاتی نشان دهید که رابطه زیر، همواره برقرار است :

$$\sum_{i=1}^{\infty} [x_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - x_j)] + \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x_i) = 1$$

موفق باشید