



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی	۱۷ آذر ۱۳۹۳
مدرس: مهدی جعفری	<b>تمرین سری پنجم</b>
موضوع تحویل: چهارشنبه ۳ دی ۱۳۹۳ (محل تحویل متعاقبا اعلام می‌شود)	

۱- اگر  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی باشند که از بازه  $[0, 5]$  به صورت تصادفی انتخاب شده باشند، احتمال هریک از وقایع زیر را حساب کنید.

□ الف)  $X^2 + Y^2$  برابر ۱ باشد.

□ ب)  $XY$  برابر ۱۰ باشد.

□ ج)  $XY$  عددی صحیح باشد.

□ د)  $XY$  عددی گویا باشد.

۲- کریس و لئو و مانوئل قرار است برای تمرین فوتبال تیم دانشکده که بین ساعت های ۲ تا ۴ بعد از ظهر برگزار میشود به سالن جباری بروند. فرض کنید  $x$ ،  $y$  و  $z$  به ترتیب زمان هایی باشند که کریس، لئو و مانوئل وارد سالن جباری میشوند. میدانیم تابع چگالی توام  $x$  و  $y$  و  $z$  به صورت زیر تعریف میشود. چقدر احتمال دارد کریس حداقل نیم ساعت دیر برسد و لئو حتی از کریس هم دیرتر برسد؟ چقدر احتمال دارد مانوئل حداکثر بیست دقیقه بعد از کریس و نیم ساعت قبل از لئو به تمرین برسد؟

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y + z) & x, y, z \in [2, 4] \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۳- برای دو متغیر تصادفی  $x$  و  $y$  تابع توزیع توام به صورت  $F(a, b) = P(x \leq a, y \leq b)$  تعریف میشود که در آن  $a$  و  $b$  اعدادی حقیقی هستند و  $P$  تابع احتمال است. همچنین  $F(\infty, \infty)$  بصورت  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n, n)$  تعریف میشود. میدانیم تابع توزیع توام دو متغیر تصادفی  $x$  و  $y$  از رابطه زیر بدست میآید.

$$F(a, b) = \begin{cases} c - e^{-ab} & a, b \geq 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

□ الف) مقدار  $c$  را بیابید.

□ ب) تابع چگالی توام  $f(x, y)$  را بیابید.

□ ج) آیا این دو متغیر مستقل هستند؟ چرا؟

۴- نقشه شهر اینگودی (پایتخت کشور اینگادا) بصورت یک مربع  $n$  در  $n$  است که در خانه  $(i, j)$  آن (محل تلاقی سطر  $i$  ام و ستون  $j$  ام) یک برج به ارزش  $a_{ij}$  اینگولار (واحد پول اینگادا) وجود دارد. میدانیم یک تروریست در سطح شهر راه افتاده است و در تعدادی خانه بمب‌گذاری کرده است. تیمی از کارشناسان خبره در زمینه خنثی سازی بمب تک‌تک برج‌ها را بررسی کرده اند و اعلام کرده اند که در برج واقع در خانه  $(i, j)$  به احتمال  $b_{ij}$  بمب گذاری شده است.

□ الف) میدانیم اگر در یک خانه بمبی بترکد، فقط همان خانه ویران خواهد شد. امید ریاضی خسارتی که به شهر وارد میشود (مجموع ارزش برج‌هایی که ویران میشوند) را محاسبه کنید.

□ ب) فرض کنید بدانیم برای هر  $j, i \in \{1, 2, \dots, n\}$  مقدار  $b_{ij}$  برابر  $p$  باشد. اما این بار با نسل پیشرفته تری از بمب ها سر و کار داریم به این صورت که اگر یک بمب در یک خانه بترکد، علاوه بر آن خانه همه خانه های مجاور با آن نیز میترکند (دو خانه را مجاور میگوییم اگر در یک ضلع مشترک باشند). امید ریاضی خسارت وارده به شهر را در این حالت محاسبه کنید.

□ ج) فرض کنید تیم تجسس ما اعلام کرده است که تروریست  $m$  بمب داشته است و بمب ها را به صورت کاملاً تصادفی در  $m$  برج کاشته است. همچنین طبق گزارش این تیم بمب های تروریست این گونه عمل میکنند که اگر یک بمب در یک خانه بترکد، همه خانه های هم سطر و هم ستون آن نیز منفجر میشوند. امید ریاضی خسارت وارده به شهر را در این حالت نیز محاسبه کنید.

۵- مثلثی به رئوس  $(0, 0)$ ،  $(0, 1)$  و  $(1, 0)$  در صفحه کشیده شده است. و نقطه  $(X, Y)$  به تصادف از درون آن انتخاب میشود.

□ الف) تابع چگالی توام  $f(x, y)$  را بیابید.

□ ب) تابع  $f_{X|Y}(x|y)$  را محاسبه کنید.

□ ج) مقدار  $E(X|Y = y)$  را محاسبه کنید.

۶- در کشور اینگادا  $n$  خانواده ۴ نفری زندگی میکنند. به تازگی ویروسی وارد این کشور شده است و  $m$  نفر را به تصادف کشته است. دولت اینگادا برای جلوگیری از این ویروس تصمیم گرفته است به هر خانواده ۱۰ هزار اینگود بدهد تا با استفاده از آن به دکتر بروند و از مرگ خود جلوگیری کنند. همچنین دولت اعلام کرده است تنها به خانواده هایی این پول را میدهد که همه اعضای آن زنده باشند. امید ریاضی پولی که دولت به مردم میدهد را حساب کنید.

۷- درستی روابط زیر را نشان دهید:

$$\square \text{ الف) } Cov(x + y, x - y) = Var(x) - Var(y)$$

$$\square \text{ ب) } Var(x - y) = Var(x) + Var(y) - 2Cov(x, y)$$

۸- فرمولی برای محاسبه  $Var(xy)$  بر حسب امید ریاضی و واریانس  $X$  و  $Y$  و کوواریانس این دو متغیر بیابید و درستی آن را ثابت کنید.

۹- اگر  $X$  یک متغیر نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱ باشد به آن نرمال استاندارد می گویند و آن را با  $N(0, 1)$  نمایش میدهند. فرض کنید  $X$  یک متغیر نرمال استاندارد باشد. تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی  $X$  را با  $M_X$  نشان میدهیم.

□ الف)  $M_X$  را محاسبه کنید.

□ ب) فرض کنید  $Y$  یک متغیر نرمال با میانگین  $\mu$  و  $\sigma^2$  باشد، با استفاده از قسمت الف تابع  $M_Y$  را محاسبه کنید.

□ ج) میدانیم اگر برای متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  توابع مولد گشتاور  $M_X$  و  $M_Y$  برابر باشند، آنگاه توزیع  $X$  و  $Y$  هم برابر است. فرض کنید متغیر تصادفی  $S$  چنان باشد که  $M_S(t) = e^{t+2t^2}$ . مقدار  $P(0 < S < 1)$  را بیابید.

۱۰- برای متغیر تصادفی  $X$  داریم  $M_X(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{t}{3}$ . مقدار  $Var(x)$  و  $E(X^r)$  را برای هر  $r$  طبیعی محاسبه کنید.

موفق باشید