



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

۴ آذر ۱۳۹۳

آمار و احتمال مهندسی

تمرین سری چهارم

موعده تحویل: سه‌شنبه ۱۸ آذر، قبل از شروع کلاس

مدرس: مهدی جعفری

۱- برای متغیر تصادفی پواسون X با پارامتر λ نشان دهید که:

□ الف) $P(0 < X < 2\lambda) > (\lambda - 1)/\lambda$

□ ب) $E[X(X - 1)] = \lambda^2, E[X(X - 1)(X - 2)] = \lambda^3$

□ ج) $E[X^n] = \lambda E[(X + 1)^{n-1}]$

۲- نشان دهید که:

□ الف) $Cov(X, Y) = Cov(X, E[Y|X])$

□ ب) برای ثابت‌های a و b فرض کنید $E[Y|X] = a + bX$ نشان دهید: $b = Cov(X, Y)/Var(X)$

۳- محمد یک تاس را پشت سر هم پرتاب می‌کند. اگر X را تعداد بارهایی که تاس باید پرتاب شود تا عدد روی تاس ۶ شود و Y را تعداد بارهایی که تاس باید پرتاب شود تا عدد روی تاس ۵ شود، تعریف کنیم.

□ الف) $E[X]$ را محاسبه کنید.

□ ب) $E[X|Y = 1]$ را محاسبه کنید.

□ ج) $E[X|Y = 5]$ را محاسبه کنید.

□ د) حال امید مجموع عددهایی که به دست می‌آید در ۱۰ پرتاب را محاسبه کنید.

۴- واریانس یک متغیر تصادفی با توزیع‌های زیر را (بدون استفاده از تابع مولد گشتاور و با محاسبه مستقیم) بیابید:

□ الف) توزیع دو جمله‌ای $B(n, p)$

□ ب) توزیع پواسن با پارامتر λ

□ ج) توزیع هندسی با پارامتر p

۵- در کلاس آمار و احتمال دکتر جعفری ۱۰۰۰ نفر ثبت نام کرده‌اند.

□ الف) امید تعداد روزهایی از سال که تولد سه نفر از دانشجویان کلاس آمار و احتمال می‌باشد، چقدر است؟

□ ب) امید تعداد روزهایی که حداقل تولد یکی از دانشجویان کلاس می‌باشد.

۶- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند (ممکن است وابسته هم باشند). متغیر تصادفی جدید Z را به این گونه تعریف می‌کنیم که یک سکه متقارن (که مستقل از X و Y است) پرتاب می‌کنیم. اگر سکه شیر آمد متغیر Z را برابر با X قرار می‌دهیم و اگر خط آمد متغیر Z را برابر Y قرار می‌دهیم.

(a) توزیع Z را بدست بیاورد.

(b) امیدریاضی Z را برحسب امیدریاضی X و Y بدست بیاورید.

(c) واریانس Z را بدست بیاورید و نشان دهید که از میانگین واریانس‌های X و Y بیشتر است. توضیح دهید چرا؟

۷- اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی مشترک زیر باشند:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & 0 < y < 1, 0 < x < y \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

محاسبه کنید:

□ الف) $E[XY]$

□ ب) $E[X]$

□ ج) $E[Y]$

۸- در یک بسته قرص، m قرص کامل و n نیم‌قرص وجود دارد. آربین که سرما خورده هر روز به صورت تصادفی یکی از قرص‌ها را بر می‌دارد، اگر از نیم‌قرص‌ها بود آن را می‌خورد، در غیر آن صورت، قرص را به دو نیم‌قرص می‌شکاند، یکی را می‌خورد و دیگری را به بسته باز می‌گرداند.

□ الف) فرض کنید X بیانگر تعداد نیم‌قرص‌هایی باشد که پس از برداشتن آخرین قرص کامل و برگرداندن یک نیم از آن در بسته باقی می‌ماند. $E[X]$ را محاسبه کنید. (راهنمایی $n + m$ متغیر شاخص (*indicator variable*) در نظر بگیرید n تا برای نیم‌قرص‌های موجود و m تا برای هر کدام از نیم‌قرص‌هایی که پس از انتخاب یک قرص کامل به وجود می‌آید).

□ ب) فرض کنید Y روزی باشد که آخرین قرص کامل از بسته برداشته می‌شود. $E[Y]$ را محاسبه کنید. (راهنمایی: ارتباط X و Y چیست؟)

۹- دو تاس عادلانه پرتاب شده است. فرض کنید X عدد اولی باشد و Y ماکزیمم دو عدد آمده. تابع چگالی مشترک X و Y و میانگین، واریانس و کواریانس را محاسبه کنید.

۱۰- متغیرهای تصادفی $X, Y : \Omega \rightarrow R$ را *uncorrelated* می‌گوییم اگر کواریانس آن‌ها برابر با صفر شود. یک مثال از دو متغیر تصادفی *uncorrelated* بنماید که از هم مستقل نباشند.

موفق باشید