به نام خدا

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی | شنبه ۲۷ اردیبهشت ۱۳۹۳

تمرین سری پنجم

مدرس: مهدی جعفری | موعد تحویل: دوشنبه ۵ خرداد، قبل از شروع کلاس

۱- در کلاس در مورد اینکه می‌توان به متغیرهای تصادفی به عنوان بردار نگاه کرد، صحبت شد. در این تمرین به بررسی بیشتر این موضوع می‌پردازیم. به یاد بیاورید که برای دو متغیر تصادفی (به عنوان دو بردار) ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف کردیم: $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}[XY]$.

(a) در کلاس دیدیم که اگر بخواهیم متغیر تصادفی X را با متغیر تصادفی ثابت تقریب بزنیم کافی است که تصویر X در راستای متغیر تصادفی ثابت را که همان امید ریاضی X است بیابیم. راه دیگری برای یافتن این نتیجه این است که فرض کنیم متغیر تصادفی X را با متغیر تصادفی ثابت $\tilde{X} = c$ تقریب بزنیم و سعی کنیم عدد c را به گونه‌ای بیابیم که خطای تقریب (یعنی طول $X - \tilde{X}$) کمینه شود. به یاد بیاورید که طول یک بردار را به صورت جذر ضرب داخلی آن بردار در خودش تعریف می‌کنیم. بنابراین می‌خواهیم c را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $\mathbb{E}[(X-c)^2]$ کمینه شود. نشان دهید $c = \mathbb{E}[X]$.

(b) با روش تصویر کردن (که در کلاس توضیح داده شد) یا روش بالا نشان دهید که اگر بخواهیم متغیر تصادفی X را به صورت $\tilde{X} = aY$ تقریب بزنیم (یعنی فقط مولفه بردار X را راستای Y را در نظر بگیریم)، آنگاه باید داشته باشیم:

$$a = \frac{\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}[Y^2]}.$$

(c) در نهایت نشان دهید اگر بخواهیم متغیر تصادفی X را به صورت $aY + b$ تقریب بزنیم (یعنی فقط مولفه‌های بردار X را در راستای متغیر تصادفی ثابت و متغیر تصادفی Y در نظر بگیریم) برای a و b باید داشته باشیم:

$$a = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\mathrm{var}(Y)}$$

و

$$b = \mathbb{E}[X] - a\mathbb{E}[Y].$$

۲- فرض کنید متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y تابع چگالی احتمال مشترک $f(x, y)$ به صورت زیر داشته باشند:

$$f(x, y) = \frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty.$$

نشان دهید $\mathbb{E}[X|Y = y] = y$.

۳- تعداد مشتریانی که در یک روز وارد فروشگاهی می‌شوند توزیع پواسن با میانگین ۱۰ دارند. مقدار پولی که توسط هر مشتری خرج می‌شود به صورت یکنواخت در بازه $[0, 100]$ توزیع شده است. امیدریاضی و واریانس مقدار پولی که فروشگاه در یک روز بدست می‌آورد را حساب کنید.

۴- فرض کنید X و W دو متغیر تصادفی پیوسته باشند. متغیر Y را به صورت $Y = X + W$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید تابع چگالی احتمال مشترک X و Y به صورت زیر داده شده باشد:

$$f_{X,Y}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}, \qquad 0 < x < y < \infty.$$

(a) تابع چگالی احتمال X و تابع چگالی احتمال Y را بیابید.

(b) تابع چگالی احتمال مشترک X و W را بیابید.

(c) تابع چگالی احتمال W را بیابید.

۵- فرض کنید X_1، X_2، X_3 و X_4 متغیرهای تصادفی پیوسته و مستقل هستند که هرکدام تابع توزیع تجمعی یکسان F دارند. احتمال p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p = \mathbb{P}[X_1 < X_2 > X_3 < X_4].$$

(a) استدلال کنید که p برای هر تابع توزیع پیوسته F یکسان است.

(b) با انتگرال گرفتن از تابع چگالی احتمال مشترک در محدوده مناسب، مقدار p را بیابید.

(c) با استفاده از این واقعیت که $4!$ ترتیب مختلف با احتمال مساوی برای $X_1, \ldots, X_4$ وجود دارد، مقدار p را بیابید.

۶- فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X تابع چگالی احتمال $f_X(x) = 0.5e^{-|x|}$ را داشته باشد. احتمال این را حساب کنید که:

(a) $1 \leq X \leq 2$ و

(b) $X^2 - 12X + 35$.

توضیح:

برای تعداد دو یا بیشتر متغیر تصادفی نیز می‌توان تابع مولد گشتاور مشترک تعریف کرد. فرض کنید که $X_1, \ldots, X_n$ تعداد n متغیر تصادفی باشند. در این صورت تابع مولد گشتاور مشترک آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{E}\left[e^{(t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n)}\right].$$

می‌توان نشان داد که تابع مولد گشتاور مشترک $\phi(t_1, \ldots, t_n)$، توزیع مشترک متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ را به طور کامل توصیف می‌کند. همچنین در حالت کلی برای یافتن گشتاور $\mathbb{E}\left[X_1^{l_1} \cdots X_n^{l_n}\right]$ می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$\mathbb{E}\left[X_1^{l_1} \cdots X_n^{l_n}\right] = \frac{\partial^{l_1}}{\partial t_1^{l_1}} \cdots \frac{\partial^{l_n}}{\partial t_n^{l_n}} \phi(t_1, \ldots, t_n)\bigg|_{(t_1=0, \ldots, t_n=0)}.$$

۷- فرض کنید $\phi(t_1, \ldots, t_n)$ تابع مولد گشتاور متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ باشد.

(a) توضیح دهید که چگونه تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X_i (یعنی تابع $\phi_{X_i}(t_i)$) از روی تابع $\phi(t_1, \ldots, t_n)$ بدست می‌آید.

(b) نشان دهید که $X_1, \ldots, X_n$ مستقل هستند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\phi(t_1, \ldots, t_n) = \phi_{X_1}(t_1) \cdots \phi_{X_n}(t_n).$$

۸- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال باشند، که هرکدام پارامترهای μ و σ^2 دارند. نشان دهید که $X+Y$ از $X-Y$ مستقل است. هرکدام از دو متغیر تصادفی جدید چه توزیعی دارند؟
راهنمایی: برای این کار تابع مولد گشتاور مشترک این دو را بیابید.

۹- فرض کنید X توزیع نمایی با پارامتر λ داشته باشد؛ یعنی داریم:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 < x < \infty.$$

در این صورت مطلوب است محاسبه: $\mathbb{E}[X|X>1]$.

۱۰- برای متغیر تصادفی پیوسته و غیر منفی X ($X \geq 0$)، ثابت کنید:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x)) d_x$$

که $F_X(x)$ تابع توزیع تجمعی X است. با استفاده از نتیجه بالا در حالت کلی برای هر متغیر تصادفی پیوسته X (که مقادیر مثبت و منفی اختیار می‌کند) ثابت کنید:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x)) d_x - \int_{-\infty}^0 F_X(x) d_x.$$

موفق باشید