به نام خدا

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی		دوشنبه ۲۵ فروردین ۱۳۹۳
	تمرین سری سوم	
مدرس: مهدی جعفری		موعد تحویل: شنبه ۶ اردیبهشت، قبل از شروع کلاس

۱- ثابت کنید جمع دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع پواسون با پارامترهای λ_1 و λ_2 متغیری تصادفی با توزیع پواسون با پارامتر $\lambda_1 + \lambda_2$ است. به بیان دیگر اگر $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ و $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ می‌خواهیم نشان دهیم $\Pr(X + Y = k)$ توزیع پواسون است.

۲- فرض کنید n توپ داریم که n عدد ثابت و مشخصی است. همینطور فرض کنید که دو جعبه به رنگ‌های قرمز و آبی داریم. هر توپ را با احتمال p در جعبه قرمز و با احتمال $1-p$ در جعبه آبی می‌اندازیم. فرض کنید تعداد توپ‌ها در جعبه قرمز را با متغییر تصادفی X و تعداد توپ‌ها در جعبه آبی را با متغیر تصادفی Y نشان دهیم.

(a) توزیع احتمال مشترک X و Y چیست؟ توزیع حاشیه‌ای هرکدام از متغیرهای تصادفی X و Y را بیابید. امید ریاضی این متغیرها را بیابید. آیا این دو متغیر از هم مستقل هستند؟

(b) حال فرض کنید تعداد کل توپ‌ها، N، عدد ثابتی نبوده بلکه خود عددی تصادفی می‌باشد که دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است. پس از اینکه به صورت تصادفی تعداد کل توپ‌ها را مشخص کردیم، همانند حالت قبل، توپ‌ها را یکی‌یکی و مستقل از هم میان دو جعبه تقسیم می‌کنیم (هر توپ با احتمال p به جعبه قرمز و با احتمال $1-p$ به جعبه آبی می‌رود). در این حالت نیز توزیع احتمال مشترک X و Y بیابید (برای اینکار می‌توان از قانون احتمال کل استفاده کرد). امید ریاضی آنها چقدر است؟ در این حالت نشان دهید که این دو متغیر از هم مستقل هستند!

۳- تعداد n پرتاب مستقل از سکه‌ای را در نظر بگیرید که در هر پرتاب با احتمال p شیر می‌آید. می‌گوییم یک «تغییر» اتفاق افتاده اگر خروجی یک پرتاب با پرتاب قبل از آن فرق داشته باشد. به عنوان مثال اگر نتایج پرتاب $SSKSKSSK$ باشد، تعداد تغییرها برابر ۵ خواهد بود.

(a) اگر $p = 0.5$ باشد، احتمال اینکه k «تغییر» داشته باشیم را بیابید.

(b) برای p دلخواه، امید ریاضی تعداد تغییرها را بیابید.

۴- در یک جعبه $m+n$ توپ وجود دارد که m تای آنها سیاه و n تای آنها قرمز می‌باشد. توپ‌ها را یکی‌یکی و بدون جایگذاری از جعبه برمی‌داریم. فرض کنید X تعداد توپ‌های قرمزی باشد که از جعبه برداشته شده‌اند قبل از آنکه توپ سیاهی از جعبه برداشته شود. می‌خواهیم امید ریاضی X را بیابیم. به این منظور توپ‌های قرمز را از 1 تا n شماره‌گذاری می‌کنیم (در مورد چگونگی شماره‌گذاری توپ‌ها فکر کنید!). حال n متغیر تصادفی X_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{if red ball } i \text{ is taken before any black ball is chosen} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) متغیر تصادفی X را بر حسب متغیرهای X_i بیان کنید.

(b) مقدار $\mathbb{E}[X]$ را بیابید.

۵- در تمرین قبل، فرض کنید متغیر تصادفی Y تعداد توپ‌های قرمزی باشد که بعد از اولین و قبل از دومین توپ سیاه انتخاب شده‌اند.

(a) متغیر Y را بر حسب n متغیر تصادفی که هرکدام مقادیر 0 یا 1 را اختیار می‌کنند، بیان کنید.

(b) مقدار $\mathbb{E}[Y]$ بیابید.

(c) مقدار $\mathbb{E}[Y]$ را با مقدار $\mathbb{E}[X]$ که در مسئله قبل به‌دست آمده مقایسه کنید.

(d) آیا می‌توانید نتیجه‌ای که در قسمت (c) به‌دست آمده است را توضیح دهید؟

۶- اگر X یک متغییر تصادفی که مقادیر غیر منفی و صحیح به خود می‌گیرد باشد، نشان دهید:

(a)

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[X \geq k] = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X > k]$$

راهنمایی: متغیرهای تصادفی I_k، $k \geq 1$، را به صورت زیر تعریف کنید

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k \leq X \\ 0 & \text{if } k > X \end{cases}$$

حال X را برحسب I_kها بیان کنید.

(b) اگر X و Y هردو متغیرهای تصادفی با مقادیر صحیح غیرمنفی باشند، نشان دهید

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Pr[X \geq k, Y \geq l]$$

۷- یک سکه که احتمال شیر آمدن آن p است را آنقدر می‌اندازیم تا برای rامین بار شیر ظاهر شود. فرض کنید N نشان دهنده تعداد کل پرتاب‌های لازم باشد. مقدار $\mathbb{E}[N]$ را بیابید.

راهنمایی: یک راه ساده برای انجام این کار نوشتن متغیر N برحسب مجموع r متغیر تصادفی هندسی است.

موفق باشید