



## تمرین سری دوم

موعود تحویل: چهارشنبه ۲۱ اسفند ۱۳۹۲، کلاس حل تمرین، ساعت ۱۲، کلاس ۱۰۳

مدرس: مهدی جعفری

۱- با استفاده از روش‌های ترکیبیاتی (شمردن در اینجا) رابطه‌ی زیر را اثبات کنید:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

۲- فرض کنید که شما در حال انجام یک بازی تصادفی با یک حریف بسیار (بی‌نهایت) پولدار هستید و در هر مرحله یک تومان می‌برید یا می‌بازید. احتمال بردن یک تومان برابر  $p$  و احتمال باختن آن برابر  $1-p$  است. نشان دهید که احتمال باختن (از دست دادن تمام پول) شما برابر است با:

$$\begin{cases} 1 & \text{if } p \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1-p}{p}\right)^m & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

که  $m$  برابر پول اولیه شماست. این مثال ساده یکی از عواملی را نشان می‌دهد که چرا کازینوها سود می‌کنند.

۳- نشان دهید که وقایع  $A$  و  $B$  مستقل هستند اگر  $P(A|B) = P(A|B^c)$ .

۴- فرض کنید که وقایع  $A$  و  $B$  مستقل هستند. نشان دهید که  $A^c$  مستقل از  $B^c$  است.

۵- فرض کنید وقایع  $A$ ،  $B$  و  $C$  مشترکاً مستقل هستند. نشان دهید که  $A$  مستقل از  $B \cup C$  می‌باشد.

۶- سه نفر یک تاس  $n$  بعدی را هر کدام یک بار می‌اندازد. فرض کنید واقعه  $A_{ij}$  این باشد که نفر  $i$  ام و نفر  $j$  ام وجه یکسانی را در پرتابشان مشاهده کنند. در این صورت نشان دهید که وقایع  $A_{13}$ ،  $A_{12}$  و  $A_{23}$  دوه‌دو مستقل هستند ولی مشترکاً مستقل نیستند.

۷- احمد و بابک در یک روز تعطیل به مسابقه تیراندازی رفته‌اند. فرض کنید که هر دو همزمان با هم به هدف تیر پرتاب می‌کنند. با توجه به سابقه تیراندازی آنها می‌دانیم که احمد تیرانداز بهتری است و با احتمال ۰.۷ به هدف می‌زند، در صورتی که بابک با احتمال ۰.۴ به هدف می‌زند.

(a) اگر بدانیم دقیقاً یک تیر به هدف خورده باشد، احتمال اینکه تیر بابک بوده باشد چقدر است؟

(b) اگر بدانیم که هدف مورد اصابت قرار گرفته (توسط یک یا هر دو تیر ولی ما نمی‌دانیم چند تیر به هدف خورده)، احتمال اینکه بابک به هدف زده باشد چقدر است؟

۸- سه نفر با نام‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  محکوم به مرگ هستند. حاکم تصمیم به آزاد کردن یکی از این افراد می‌گیرد و نام او را به زندانبان می‌گوید. زندانی  $A$  از این قضیه مطلع می‌شود ولی نمی‌داند که قرار است چه کسی آزاد شود. به همین دلیل از زندانبان می‌خواهد که نام

فرد مورد نظر را به او بگوید. با هم قرار می‌گذارند که اگر قرار شد  $B$  آزاد شود زندان‌بان نام  $C$ ، اگر قرار شد  $C$  آزاد شود زندان‌بان نام  $B$  و اگر قرار شد که  $A$  آزاد شود زندان‌بان یک سکه بیاندازد و نام  $B$  یا  $C$  را بگوید. زندان‌بان می‌گوید که  $B$  قرار است اعدام شود. زندانی  $A$  این خبر را با خوشحالی برای زندانی  $C$  تعریف می‌کند و به او می‌گوید که حال انتخاب میان من یا تو می‌باشد و شانس زنده ماندن من از  $\frac{1}{3}$  به  $\frac{1}{2}$  افزایش یافته است. ولی زندانی  $C$  در پاسخ به او می‌گوید که شانس تو همان  $\frac{1}{3}$  مانده و شانس من  $\frac{2}{3}$  شده است. به نظر شما چه کسی درست می‌گوید؟

راهنمایی: فرض کنید زندان‌بان همیشه سکه می‌اندازد ولی از نتیجه‌ی آن فقط وقتی که قرار است زندانی  $A$  آزاد شود استفاده می‌کند. در این صورت با یافتن فضای نمونه، مسئله به روشنی قابل حل می‌باشد.

۹- فرض کنید  $n$  جعبه داریم که در یکی از آنها بمب است.  $n$  مامور خنثی‌سازی بمب که خیلی برای این کار دوره دیده‌اند به نوبت یک جعبه را انتخاب می‌کنند و شروع به بررسی آن می‌کنند. متأسفانه این بمب قابل خنثی‌سازی نیست! با توجه به این شرایط، محاسبه کنید به چه احتمالی مامور  $i$  ام منفجر می‌شود؟

۱۰- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل باشند که هر کدام توزیع پواسون با  $\lambda = 1$  دارد. متغیر تصادفی جدید  $Z$  را به این صورت تعریف می‌کنیم:  $Z = \min\{X, Y\}$ . مقدار  $P(Z = z)$  را در  $z = 1$  حساب کنید.

موفق باشید