



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آبان ۱۳۹۵

فرآیندهای تصادفی

تمرین سری دوم (مفاهیم اولیه فرآیندهای تصادفی، سیستم‌های با ورودی تصادفی، چگالی طیف توان)

موعد تحویل: دوشنبه ۲۴ آبان ۱۳۹۵، قبل از شروع کلاس

مدرس: مهدی جعفری

۱- فرض کنید $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشند. X_n با احتمال $2/3$ مقدار صفر و با احتمال $1/3$ مقدار یک

$$\text{می‌گیرد. تعریف می‌کنیم: } Y_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

(a) تابع جرم احتمال مرتبه اول Y_n را بیابید.

(b) $C_Y(n, n+k)$ ، $R_Y(n, n+k)$ ، $\mu_Y(n)$ را بیابید.

۲- تعیین کنید، هر یک از فرآیندهای زیر WSS است یا SSS .

(a) $x(n) = A$ (متغیر تصادفی با تابع چگالی $f_A(a)$ است).

(b) $x(n) = A \cos(n\omega_0)$ (متغیر تصادفی گاوسی با میانگین μ_A و واریانس σ_A^2 است).

(c) $x(n) = A \cos(n\omega_0 + \phi)$ (عدد ثابت ϕ و متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $[-\pi, \pi]$ است).

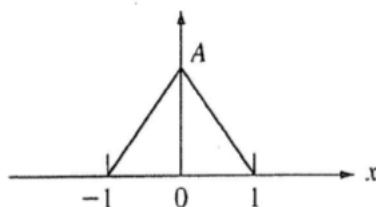
(d) $x(n) = A \cos(n\omega_0) + B \sin(n\omega_0)$ (A و B متغیرهای تصادفی ناهمبسته با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند).

(e) فرآیند برنولی که در آن $P[x(n) = 1] = 1 - P[x(n) = -1] = p$

(f) $y(n) = x(n) - x(n-1)$ (فرآیند تصادفی برنولی است).

۳- چگالی طیف توان فرآیند $Z(t) = X(t) + Y(t)$ را زمانی که $X(t)$ و $Y(t)$ به صورت توأمان WSS هستند، بیابید.

۴- فرض کنید $p(x)$ تابع مثلثی نشان داده شده در شکل زیر باشد. آیا $R_x(\tau) = p(\tau/T)$ یک تابع همبستگی مجاز است؟



۵- اگر W یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال

$$f_W(w) = \begin{cases} e^{-w} & w \geq 0, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

باشد و تعریف کنیم $X(t) = t - W$. تابع توزیع تجمعی مرتبه اول $X(t)$ ، $F_{X(t)}(x)$ ، را بدست آورید.

۶- فرآیند تصادفی $C(n)$ را به صورت زیر تعریف کرده ایم:

$$C_n = \frac{1}{2}C_{n-1} + 4X_n$$

C_0, X_1, X_2, \dots ، متغیرهای تصادفی iid ، با توزیع $N[0, 1]$ هستند.

(a) میانگین $C(n)$ را بدست آورید.

(b) تابع خودهمبستگی متقابل، $C_C[m, m+k]$ ، را بدست آورید ($k \geq 0$).

۷- موارد زیر را در مورد چگالی طیف توان اثبات کنید.

(a) $S_{xx}(\omega)$ تابعی حقیقی از ω است.

(b) اگر $x(t)$ حقیقی باشد. آنگاه $S_{xx}(\omega)$ زوج است.

(c) $S_{xy}(\omega) = S_{yx}^*(\omega)$ (* به معنی مزدوج مختلط می باشد).

(d) $S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega)|H(\omega)|^2$

۸- یک فرآیند WSS را با چگالی طیف توان

$$S_x(f) = \frac{4\omega^2 + 900}{\omega^4 + 450\omega^2 + 3969}, \quad \omega = 2\pi f$$

در نظر بگیرید.

(a) تابع همبستگی فرآیند $R_x(\tau)$ ، را بدست آورید.

(b) امید ریاضی و واریانس هر یک از متغیرهای تصادفی فرآیند چقدر است؟

(c) (سؤال امتیازی) یک فیلتر علی بیابید که این فرآیند را به فرآیند $Y(t)$ با تابع همبستگی $R_y(\tau) = e^{-3|\tau|}$ تبدیل کند. رابطه $Y(t)$ را بر حسب $X(t)$ بیابید.

۹- $X(t)$ فرآیند تصادفی WSS با تابع خودهمبستگی $R_X(\tau) = e^{-4\pi\tau^2}$ ، ورودی سیستمی با تابع تبدیل

$$H(f) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |f| \leq 2, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

است. موارد زیر را بدست آورید:

(a) متوسط توان ورودی $X(t)$.

(b) چگالی طیف توان خروجی، $S_Y(f)$.

(c) متوسط توان خروجی $Y(t)$.

۱۰- نشان دهید اگر فرایندهای $x(t)$ و $y(t)$ WSS باشند و $E[|x(0) - y(0)|^2] = 0$ ، آنگاه $R_{xx}(\tau) = R_{yy}(\tau) = R_{xy}(\tau)$.

۱۱- فرض کنید $X(t)$ یک فرآیند با تابع متوسط $m_x(t) = 0$ و تابع همبستگی $R_x(t + \tau, t) = e^{-t^2 \delta(\tau)}$ است.

(a) آیا این فرآیند از نظر متوسط (امید ریاضی) ارگادیک است (ME)؟ چرا؟

(b) آیا این فرآیند از نظر همبستگی ارگادیک است (CE)؟ چرا؟

موفق باشید