دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

فرایندهای تصادفی — مهر ۱۳۹۵

تمرین سری اول (مروری بر احتمال)

مدرس: مهدی جعفری — موعد تحویل: دوشنبه ۳ آبان ۱۳۹۵، قبل از شروع کلاس

۱- اگر فضای نمونه‌ی یک آزمایش تصادفی به صورت $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ باشد، کوچکترین سیگما فیلدی که شامل $\{a\}$ و $\{b, c\}$ باشد چیست؟

۲- دو واقعه‌ی A و B را در نظر بگیرید. متغیرهای تصادفی X و Y را به نحوی تعریف کنید که X و Y مستقل باشند، اگر و فقط اگر A و B مستقل باشند.

۳- وقایع $C_1, C_2, \ldots, C_n$ به صورت توام مستقل هستند. ضمنا برای هر $1 \leq i \leq n$، D_i یا برابر با C_i یا برابر با $\bar{C}_i$ است. نشان دهید وقایع $D_1, D_2, \ldots, D_n$ هم مستقل هستند.

۴- مثالی از سه متغیر تصادفی بزنید که به صورت دو به دو مستقل هستند، اما به صورت توام مستقل نیستند.

۵- متغیرهای تصادفی X, Y, Z با توزیع توام $P(X, Y, Z)$ را داریم و می‌دانیم که

$$P(X, Y, Z) > 0, \quad \forall X, Y, Z.$$

ثابت کنید:

$$X \perp Y | Z \texttt{ and } X \perp Z | Y \Rightarrow X \perp (Y, Z).$$

۶- n کارت داریم که به روی آن‌ها شماره‌های 1 تا n نوشته شده است. n پاکت هم داریم که روی آن‌ها شماره‌های 1 تا n نوشته شده است. کارت‌ها را به صورت تصادفی در پاکت‌ها قرار می‌دهیم (در هر پاکت دقیقا یک کارت قرار دارد. ضمنا احتمال قرار گیری هر ترتیبی از کارت‌ها در پاکت‌ها با یکدیگر برابر است). امید ریاضی تعداد کارت‌هایی که در پاکتی با شماره‌ی مشابه قرار می‌گیرند چقدر است؟

۷- واقعه‌های A و B را به شرط C مستقل می‌گویند هر گاه $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.
یک شرکت بیمه اعتقاد دارد که مردم را به دو دسته با احتیاط و بی‌احتیاط می‌توان تقسیم کرد. احتمال این که یک فرد با احتیاط در یک سال تصادف داشته باشد ۰.۲ و این احتمال برای یک فرد بی‌احتیاط ۰.۴ است. ضمنا بنابر فرض این شرکت می‌توان برای یک فرد، واقعه‌ی داشتن تصادف در یک سال و واقعه‌ی داشتن تصادف در سالی دیگر را به شرط با احتیاط بودن آن فرد (و نیز به شرط بی‌احتیاط بودن آن فرد) مستقل در نظر گرفت. ضمنا می‌دانیم که ۳۰ درصد افرادی که بیمه می‌شوند بی‌احتیاط هستند. احتمال شرطی این که یک فرد بیمه شده در دومین سال قرارداد تصادفی داشته باشد، به شرط این که در سال اول تصادف داشته باشد را به دست آورید.

۸- توزیع توام دو متغیر تصادفی X و Y به صورت نرمال $N(\mu, \Sigma)$ است که $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$ و $\Sigma = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v22 \end{bmatrix}$.

(a) توزیع حاشیه‌ای X به چه صورت است؟ (فقط پاسخ نهایی را بنویسد، نیازی به اثبات نیست).

(b) مقدار کواریانس X و Y چقدر است (فقط پاسخ نهایی را بنویسید، نیازی به اثبات نیست).

(c) با توجه به دو قسمت قبل، نشان دهید در صورتی که توزیع توام X و Y به صورت نرمال باشد، آن‌گاه در صورتی که این دو متغیر غیر همبسته باشند، آن‌گاه مستقل هم هستند.

۹- تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

$$M_X(r) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{2}e^r\right)^{10}.$$

(a) مقدار $\mathrm{Var}(X)$ را بیابید.

(b) با استفاده از نامساوی چبیشف، کران بالایی برای $P((X-\mu_X)^2) \geq 100$ بیابید.

۱۰- (سوال امتیازی) تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

$$M_X(r) = \frac{1}{6}e^r + \frac{1}{3}e^{2r} + \frac{1}{2}e^{3r}.$$

تابع توزیع X را بیابید.

۱۱- n مهره که روی آن‌ها شماره‌های 1 تا n نوشته شده است در کیسه‌ای ریخته شده‌اند. شخصی در هر مرحله یک مهره را به تصادف (با احتمال مساوی برای مهره‌های مختلف) از کیسه در می‌آورد، شماره‌ی روی آن را نگاه می‌کند و دوباره آن را به داخل کیسه می‌اندازد. امید ریاضی تعداد مراحلی که طول می‌کشد تا این شخص تمام اعداد 1 تا n را مشاهده کند چقدر است؟ (راهنمایی: تعداد مراحل لازم را به صورت جمع n متغیر تصادفی تعریف کنید که محاسبه‌ی امید ریاضی هر کدام از آن‌ها آسان باشد).

۱۲- n نفر با شماره‌های 1 تا n داریم و n کارت داریم که روی آن‌ها اعداد 1 تا n نوشته شده است. به صورت تصادفی، به هر نفر یک کارت می‌دهیم (با احتمال مساوی برای ترتیب‌های مختلف). احتمال آن که هیچ کس کارتی با شماره‌ی خودش دریافت نکرده باشد چقدر است؟

۱۳- یک سکه را آن قدر می‌اندازیم تا دو بار پشت سر هم شیر یا دو بار پشت سر هم خط بیاید. با استفاده از نامساوی مارکوف:

(a) برای احتمال آن که تعداد پرتاب‌ها بیشتر حداقل ۶ باشد کران بالایی بیابید.

(b) برای احتمال آن که تعداد پرتاب‌ها کمتر از ۹ باشد کران پایینی بیابید.

۱۴- در کشوری، برای آن که میانگین قد افراد، از 1000 کارمند اداره‌ی آمار کمک گرفته‌ایم. هر کارمند، 2000 نفر را به صورت تصادفی از سراسر کشور انتخاب کرده و میانگین قد آن‌ها را به دست آورده است. به این ترتیب 1000 عدد به دست آورده‌ایم. بعد میانگین و واریانس این 1000 عدد را حساب کرده‌ایم، برابر با 173 و 0.7 شده است. طبق قانون اعداد بزرگ و قضیه‌ی حد مرکزی، تخمینی برای میانگین و واریانس قد افراد این کشور ارائه کنید.

موفق باشید.