دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

Engineering Probability and Statistics (آمار و احتمال مهندسی) اسفند ۱۳۹۴

تمرین سری دوم

مدرس: مهدی جعفری موعد تحویل: ۲۴ فروردین ۱۳۹۵

۱- درستی یا نادرستی هرکدام از عبارات زیر را اثبات نمایید:

(a) اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال p_X ، Y یک متغیر تصادفی و y یک عدد باشد، می‌توان گفت که $p_X(y)$ یک عدد و $p_X(Y)$ یک متغیر تصادفی و $X + x$ یک متغیر تصادفی خواهد بود.

(b) اگر A یک رخداد از فضای نمونه‌ی S باشد، A و S مستقل از یکدیگرند.

(c) اگر A, B, C سه پیشامد باشند و A و B مستقل و $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B \cup C)$، در نتیجه $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B \cap C)$.

(d) A و B دو پیشامد مستقل هستند اگر و فقط اگر $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c)$.

۲- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با توزیع پوآسون به ترتیب با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند:

(a) مقدار k را به گونه‌ای بیابید که $\mathbb{P}(X = k)$ ماکزیمم شود.

(b) توزیع $X + Y$ را محاسبه نمایید.

۳- تعداد مراجعات انجام شده به دفتر دانشکده کامپیوتر توسط دانشجویان خانم و یا آقا در هر روز برای یک بازه ۵۰ روزه در شکل زیر ذخیره شده است. در این شکل تعداد ۵۰ جفت عدد را مشاهده می‌نمایید که عدد سمت چپ در هر جفت تعداد مراجعات خانم‌ها و عدد راستی تعداد مراجعات آقایان در یک روز مشخص را نمایش می‌دهد. با فرض این‌که تعداد مراجعات افراد در هر روز از توزیع پوآسون پیروی می‌نماید، تابع توزیع هرکدام از متغیرهای زیر را بدست آورید:

0, 2	2, 2	6, 0	3, 5	1, 2
2, 2	1, 1	2, 2	1, 1	2, 3
7, 0	1, 4	3, 6	2, 3	3, 0
4, 1	5, 1	4, 3	5, 4	6, 4
1, 0	2, 3	3, 2	3, 3	6, 1
2, 3	2, 2	2, 1	3, 5	5, 3
4, 3	4, 2	3, 4	4, 3	3, 1
3, 1	3, 3	4, 4	5, 4	2, 1
5, 6	1, 2	2, 2	1, 2	3, 3
4, 2	0, 5	4, 4	2, 2	4, 1

(a) تعداد مراجعات خانم‌ها در یک روز

(b) تعداد مراجعات آقایان در یک روز

(c) تعداد کلیه مراجعات (آقا یا خانم) در یک روز

(d) تعداد کلیه مراجعات در ۱۰ روز

(e) تعداد مراجعات آقایان در یک روز به شرط آن‌که بدانیم جمع کل مراجعات (آقا یا خانم) در آن روز برابر n می‌باشد.

۴- برای تهیه تعداد ۱۰۰ قطعه گز، ۳۰۰ عدد پسته و ۲۰۰ عدد بادام را با مواد اولیه کاملا ترکیب می‌نماییم.

(a) اگر ۵ گز را به صورت تصادفی انتخاب نماییم، با چه احتمالی حداقل ۳ گز دارای بیش از ۲ عدد پسته است؟

(b) اگر یک گز را به صورت تصادفی انتخاب نماییم، با چه احتمالی هیچ پسته و بادامی در آن یافت نمی‌شود؟

۵- برای مصاحبه با یکی از استادان دانشکده کامپیوتر از طبقه هشتم شروع به در زدن اتاق‌های آن‌ها می‌کنیم تا اولین استادی که در اتاقش حضور داشت را برای مصاحبه انتخاب نماییم. بنا به آمارگیری که قبلا انجام داده‌ایم، هر استاد به احتمال 0.3 در اتاقش حضور دارد.

(a) با چه احتمالی استاد اتاق سوم برای مصاحبه انتخاب می‌شود؟

(b) اگر ۱۰ استاد اول در اتاقشان حضور نداشته باشند با چه احتمالی با استاد اتاق ۱۳ ام مصاحبه خواهیم نمود؟

(c) حال اگر بدانیم از ۲۰ استادی که اتاقشان در طبقه ۸ قرار دارد، ۳ نفر سفارش ناهار داده و وقت مصاحبه ندارند، با چه احتمالی استاد اتاق سوم برای مصاحبه انتخاب می‌شود؟

۶- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل و یکسان با توزیع هندسی و پارامتر p باشند. ثابت نمایید که به ازای تمامی مقادیر $i = 1, 2, ..., n-1$ ، احتمال $\mathbb{P}(X = i | X + Y = n)$ برابر با $\frac{1}{n-1}$ می‌باشد.

۷- سکه ای که احتمال شیر آمدن آن p است را آنقدر می اندازیم که r بار شیر بیاید. فرض کنید N نشان دهنده‌ی تعداد کل پرتاب‌های لازم باشد:

(a) متغیر N را به صورت جمع r متغیر تصادفی هندسی بنویسید.

(b) مقدار $P(N = k)$ را بدست آورید.

۸- سکه‌ای داریم که احتمال شیر آمدن آن $1/3$ است. این سکه را ۳۰ بار پرتاب می‌کنیم:

(a) فرض کنید X متغیر تصادفی تعداد شیرها باشد. توزیع احتمال X را بیابید.

(b) مقدار k را به گونه‌ای بیابید که $\mathbb{P}(X = k)$ ماکزیمم شود.

(c) در حالت کلی به ازای یک متغیر تصادفی با توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای (n, p)، مقدار k را به گونه‌ای بیابید که $\mathbb{P}(X = k)$ ماکزیمم شود.

۹- سامان و قاسم بازی با تاس را انجام می‌دهند به این شکل که ابتدا تاس دست سامان است، سامان تاس را می‌ریزد اگر 6 آمد تاس را به قاسم می‌دهد و در غیر این صورت تاس دست خودش می‌ماند. حال دوباره آن کسی که تاس دستش هست همین کار را تکرار می‌کند. یعنی اگر 6 بود تاس به دست نفر مقابل می‌رود و درغیر این صورت تاس دست خودش می‌ماند. این کار را n بار انجام می‌دهند، احتمال این که تاس دست سامان باشد چقدر است؟

۱۰- تعداد $m + n$ تا رقم داریم که m تا از آن‌ها 0 و n تا از آن‌ها 1 است. می‌دانیم که با این ارقام می‌توان تعداد $\binom{m+n}{m}$ رشته متمایز از 0 و 1 درست نمود. حال رشته‌ای با توزیع یکسان از بین این رشته‌ها انتخاب می‌نماییم. احتمال این که تعداد بلوک‌های 1 در این رشته برابر با k باشد ($k < n$) چقدر است؟ (برای مثال تعداد بلوک‌های رشته‌ی 11001011 برابر ۳ و تعداد بلوک‌های رشته‌ی 1110000 برابر ۱ است.)

موفق باشید