دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

Engineering Probability and Statistics (آمار و احتمال مهندسی)	اسفند ۱۳۹۴

تمرین سری اول

مدرس: مهدی جعفری	موعد تحویل: ۲۴ اسفند ۱۳۹۴

۱- فرض کنید A_iها n رویداد دلخواه در فضای نمونه باشند. با توجه به اصل شمول و عدم شمول، نامساوی زیر را اثبات کنید:

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right) - \sum_{i<j} \mathbb{P}\left(A_i, A_j\right) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}\left(A_i, A_j, A_k\right)$$

۲- دو سکه در اختیار داریم. یک سکه منظم است (در صورت پرتاب شدن به احتمال $1/2$ شیر یا خط می‌آید) ولی در سکه ی دوم احتمال آمدن خط $2/3$ و احتمال آمدن شیر $1/3$ است. یکی از دو سکه را به طور تصادفی بر می‌داریم و آن را دو بار پرتاب می‌کنیم. هر دو بار خط مشاهده می شود. احتمال این که سکه ای که برداشته بودیم منظم باشد چقدر است؟

۳- یک مهره در مبدأ مختصات $(0, 0)$ قرار دارد. در هر مرحله اگر در خانه (x, y) باشد می‌تواند به صورت‌های زیر حرکت کند:

- می‌تواند به یکی از خانه‌های $(x + 1, y)$، $(x - 1, y)$، $(x, y + 1)$ یا $(x, y - 1)$ حرکت کند، هر کدام با احتمال 0.1.
- می‌تواند به یکی از خانه‌های $(x + 1, y + 1)$، $(x - 1, y + 1)$، $(x + 1, y - 1)$ یا $(x - 1, y - 1)$ حرکت کند، هر کدام با احتمال 0.05.
- با احتمال 0.4 هیچ حرکتی نکند.

در این صورت احتمال اینکه پس از گذشت 6 مرحله مهره در مختصات زوج قرار گرفته باشد چقدر است؟ (هر دو مختصه x و y زوج باشند).

۴- k خانواده در شهر زندگی می‌کنند. هر خانواده با احتمال $1/2$ صاحب فرزند دختر و با احتمال $1/2$ صاحب فرزند پسر می‌شود. همچنین هر خانواده تا جایی بچه‌دار می‌شود که اولین فرزند دختر آنان به دنیا بیاید و سپس دیگر بچه‌دار نخواهد شد. اگر به صورت تصادفی از میان فرزندان تمام خانواده‌ها، یک نفر را انتخاب کنیم با چه احتمالی دختر خواهد بود؟

۵- یک قطار و یک اتوبوس در زمانی تصادفی بین 9 و 10 صبح به ایستگاه می رسند. قطار به مدت 10 دقیقه و اتوبوس به مدت x دقیقه در ایستگاه می ماند. مقدار x چقدر باشد تا احتمال این که قطار و اتوبوس همدیگر را در ایستگاه ببینند برابر 0.5 باشد؟

۶- دو زیر مجموعه A و B را به صورت تصادفی و مستقل از یک مجموعه n عضوی انتخاب می‌کنیم. فرض نمایید توزیع احتمال هر دو انتخاب روی تمامی زیر مجموعه‌های ممکن کاملاً یکنواخت باشد. روابط زیر را اثبات کنید:

الف) $\mathbb{P}\left(A \subset B\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

ب) $\mathbb{P}\left(A \cap B = \emptyset\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

۷- دو جعبه شامل مهره‌ها داریم. در جعبه اول 2 مهره آبی و 4 مهره قرمز وجود دارد، و در جعبه دوم 3 مهره آبی و 3 مهره قرمز موجود است. ابتدا یک جعبه را انتخاب کرده (بدون آنکه بدانیم کدامیک از دو جعبه فوق بوده است) و یک مهره را به صورت تصادفی از آن برمی‌داریم. پس از دیدن رنگ مهره انتخابی (و بدون بازگرداندن آن به جعبه) یک مهره دیگر را به صورت تصادفی از آن جعبه انتخاب می‌کنیم. در صورتیکه رنگ مهره اول قرمز بوده باشد، احتمال آنکه دومین مهره انتخابی آبی‌رنگ باشد چقدر است؟

۸- الف) فرض کنید یک فیل سفید و یک شاه سیاه را به طور تصادفی در صفحه شطرنج 4×4 قرار می‌دهیم. هم چنین فرض کنید اکنون نوبت سفید است. احتمال این که فیل سفید شاه را تهدید کند چقدر است؟

ب) در این قسمت فرض کنید به جای یک جدول 4×4 در یک صفحه ی شطرنج $n \times n$ (عدد n به اندازه ی کافی بزرگ است) سه مهره ی فیل سفید، سرباز سفید و شاه سیاه را به طور تصادفی قرار دهیم و نوبت سفید است. به نظر شما احتمال این که شاه سیاه توسط مهره های سفید تهدید شود در این حالت بیشتر است یا در حالتی که فقط یک فیل سفید و یک شاه سیاه بر روی صفحه قرار داشته باشند؟

۹- گرافی تصادفی با استفاده از رئوس $1, 2, ..., 5$ به این شکل ساخته می شود که در آن هر یال ممکنه می‌تواند به احتمال $1/2$ وجود داشته یا نداشته باشد و یال ها نیز از هم مستقل هستند. احتمال این که این گراف دور نداشته باشد را محاسبه کنید.

(امتیازی) فرض یک گراف تصادفی با n رأس داشته باشیم که هر یال ممکنه آن به صورت مستقل و با احتمال $\frac{1}{n}$ موجود باشد. در حد $n \to \infty$ می‌توان نشان داد که احتمال رخ ندادن دور از یک کران بالا کمتر است. این کران بالا را محاسبه کنید.
راهنمایی: می‌توانید از اصل شمول و عدم شمول برای محاسبه یک کران بالای مناسب استفاده نمایید.

۱۰- اگر Q_n احتمال این پیشامد باشد که در n بار پرتاب یک سکه منظم، سه شیر به صورت متوالی ظاهر نشود، آنگاه ثابت کنید:

$$Q_n = \frac{1}{2}Q_{n-1} + \frac{1}{4}Q_{n-2} + \frac{1}{8}Q_{n-3}.$$

بدیهی است که $Q_0 = Q_1 = Q_2 = 1$.

موفق باشید