هوالحق

Stochastic Processes

General Concepts

Note 2

مهدی جعفری سیاوشانی

دانشگاه صنعتی شریف

* مطالب این درس گفتار:

- مفاهیم پایه و تعاریف مقدماتی فرایندهای تصادفی
- خواص آماری فرایندهای تصادفی
- فرایندهای تصادفی ایستا (Stationary Stochastic Processes)
- فرایندهای تصادفی متناوب با معیار Mean Square
- چند مثال برای فرایندهای ایستا (فرایندهای iid، فرایند برنولی، نویز سفید)
- Ergodicity
- بررسی سیستم‌ها با ورودی تصادفی
- طیف توان (Power Spectrum)

* تعاریف :

اگر به یاد داشته باشید متغیر تصادفی X یک تابع از فضای نمونه Ω آزمایش تصادفی به مجموعه اعداد (حقیقی) است:

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

- تعریف فرایند تصادفی :

فرایند تصادفی $\{X(t)\}$ قاعده‌ای است برای اینکه به هر پیشامد $\omega \in \Omega$ تابعی به صورت $X(t,\omega)$ برحسب t نسبت دهیم. دامنه ω فضای نمونه Ω است و دامنه t مجموعه R است.

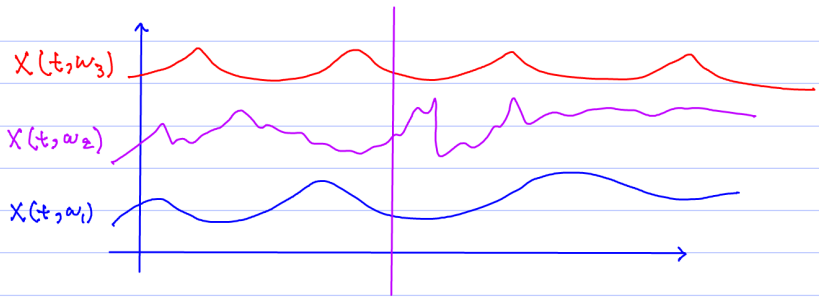
اگر $R=\mathbb{R}$ می‌گوییم $X(t)$ یک فرایند پیوسته در زمان است. اگر R مجموعه اعداد صحیح باشد $X(t)$ را یک فرایند گسسته در زمان می‌گوییم. در این حالت فرایند تصادفی گسسته در زمان دنباله‌ای شمارا از متغیرهای تصادفی است که معمولا به صورت $\{X_n\}$ (یا $\{X_n, n\geq 1\}$) نمایش داده می‌شود.

می‌گوییم فرایند $X(t)$ گسسته حالت (discrete state) است اگر که مقادیری که $X(t)$ به خود می‌گیرد شمارا باشد، در غیر این صورت پیوسته حالت (Continuous state) است.

- معمولا فرایند یک تصادفی را به صورت $\{X(t)\}$ نشان می‌دهند و همانند متغیر تصادفی وابستگی به ω را از نمایش آن حذف می‌کنند.

در تعریف بالا باید به معنی عبارات به درستی دقت کرد. برای یک ω_1 خاص $X(t,\omega_1)$ تابعی از t است. به این تابع یک مسیر نمونه (Sample path) می‌گوییم.

برای یک زمان خاص $t=t_1$، $X(t_1,\omega)$ یک متغیر تصادفی است. در واقع مقدار فرایند مورد نظر در زمان t_1 است در آزمایش‌های مختلف.



$X(t_1,\omega)$: یک متغیر تصادفی

برای $\omega=\omega_1$ و $t=t_1$ ، $X(t_1,\omega_1)$ یک عدد است که در واقع مقدار نمونه (Sample Value) فرایند ما در زمان t_1 و در یک آزمایش خاص است.

- مثال: حرکت براونی (Brownian motion):

حرکت یک ذره میکروسکپی (مثل ذرات گرد و غبار) در یک مایع یا گاز را می‌توان به عنوان یک فرایند تصادفی در نظر گرفت. این فرایند شامل حرکت همه ذرات است. یک تحقق (realization) خاص $X(t,\omega_i)$ از این فرایند (یا یک مسیر نمونه) مسیر یک ذره خاص (ذره i ام) است.

- مثال: به عنوان مثال دیگر می‌توانیم فرایند تصادفی زیر را در نظر بگیریم:

$$X(t)=R\cos(\alpha t+\Phi)$$

که R و Φ دامنه و فاز تصادفی هستند. در واقع یک مسیر نمونه برای این فرایند به صورت زیر است:

$$X(t,\omega_i)=R(\omega_i)\cos(\alpha t+\Phi(\omega_i))$$

- چند نکته: طبق تعریف هر دو مثال بالا فرایندهای تصادفی هستند، ولی تفاوت های بنیادی ای با هم دارند. مثال اول شامل خانواده ای از توابع است که نمی‌توان آنها را با تعداد متناهی پارامتر توصیف کرد. علاوه بر آن آینده یک مسیر نمونه $X(t,\omega)$ را نمی‌توان با مشاهده گذشته آن مشخص کرد. فقط تحت شرایطی می‌توان بعضی از خواص آماری فرایند $X(t)$ را می‌توان از روی یک مسیر نمونه $X(t,\omega)$ بدست آورد.

مثال دوم شامل خانواده ای از توابع است که کاملا توسط دو متغیر تصادفی R و Φ مشخص می‌شوند. به علاوه اگر مقادیر یک مسیر نمونه $X(t,\omega)$ را برای $t\leq t_0$ داشته باشیم می‌توانیم مقادیر آینده $t>t_0$ را بدست بیاوریم. آخر اینکه با مشاهده یک مسیر نمونه نمی‌توانیم خواص آماری فرایند تصادفی $X(t)$ را بدست آوریم برای اینکه مسیر نمونه $X(t,\omega)$ فقط به مقادیر خاص $R(\omega)$ و $\Phi(\omega)$ بستگی دارد.

- تساوی دو فرایند تصادفی:

می‌گوییم دو فرایند تصادفی $X(t)$ و $Y(t)$ (همجا) مساوی هستند اگر که مسیرهای نمونه $X(t,\omega)$ و $Y(t,\omega)$ برای هر $\omega\in\Omega$ مساوی باشند.

به طور مشابه برای جمع دو فرایند تصادفی $Z(t)=X(t)+Y(t)$ داریم:

$$Z(t,\omega)=X(t,\omega)+Y(t,\omega)\qquad :\forall\,\omega\in\Omega$$

در حالت های خاص و بسیاری کاربردهای دیگر می توان تعریف برابری بالا را ریلکس تر کرد.

مثلا می گوییم دو فرایند $X(t)$ و $Y(t)$ با معیار mean square برابر هستند اگر که:

$$E\left[\left(X(t)-Y(t)\right)^2\right]=0 \qquad : \forall t$$

همچنین می توانیم از برابری با احتمال 1 صحبت کنیم:

$$\mathbb{P}\left[\omega\in\Omega : \ X(t,\omega)=Y(t,\omega) \ : \ \forall t\right]=1$$

(در حالت کلی مشابه حرف هایی که برای همگرایی متغیرهای تصادفی زدیم برای برابری فرایندهای تصادفی هم می توانیم بزنیم).

• نکته: فرض کنید وقایع A_t و $A_{t,\varepsilon}$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$A_t=\{\omega\in\Omega : \ X(t,\omega)=Y(t,\omega)\}$$

$$A_{t,\varepsilon}=\{\omega\in\Omega : \ |X(t,\omega)-Y(t,\omega)|\leqslant\varepsilon\}$$

و داریم:

$$A_t=\bigcap_{\varepsilon_n} A_{t,\varepsilon_n}$$

که ε_n دنباله ای از اعداد کوچک که $\varepsilon_{n-1}\geqslant\varepsilon_n$ و:

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$$

حال اگر $X(t)$ و $Y(t)$ با معیار MS برابر باشند داریم:

$$\mathbb{P}\left[A_{t,\varepsilon}^c\right]\leqslant\frac{E\left[\left(X(t)-Y(t)\right)^2\right]}{\varepsilon^2}=0$$

در نتیجه:

$$\forall t: \quad \mathbb{P}[A_t]=\mathbb{P}\left[\omega\in\Omega : \ X(t,\omega)=Y(t,\omega)\right]=1$$

ولی عبارت بالا نتیجه نمی دهد که: $\mathbb{P}[A_\infty]=1$. واقعه A_∞ اشتراک همه وقایع A_t است که حتی ممکن است احتمالی برابر 0 داشته باشد.

- خواص آماری فرایندهای تصادفی:

یک فرایند تصادفی (پیوسته در زمان) از تعداد نامتناهی متغیر تصادفی تشکیل شده است. برای یک t خاص، $X(t)$ یک متغیر تصادفی است که با تابع توزیع تجمعی زیر توصیف می‌شود:

$$F(x,t) = \mathbb{P}[X(t) \leqslant x]$$

این تابع در حالت کلی به t بستگی دارد. تابع $F(x,t)$ را تابع توزیع تجمعی مرتبه اول فرایند $X(t)$ می‌گوییم. اگر مشتق آن وجود داشته باشد تابع چگالی احتمال مرتبه اول به صورت زیر بدست می‌آید:

$$f(x,t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}$$

تابع توزیع تجمعی مرتبه دوم فرایند تصادفی $X(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) = \mathbb{P}[X(t_1) \leqslant x_1 \,,\, X(t_2) \leqslant x_2]$$

و تابع چگالی احتمال متناظر آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

روابط زیر را نیز داریم (روابط حاشیه‌سازی):

$$F(x_1,t_1) = F(x_1,\infty;t_1,t_2)$$

$$f(x_1,t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2;t_1,t_2)\, dx_2$$

تابع توزیع تجمعی مرتبه nام فرایند $X(t)$ به صورت توزیع مشترک متغیرهای تصادفی $X(t_1)$ و ... و $X(t_n)$ تعریف می‌شود:

$$F(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n) = \mathbb{P}[X(t_1) \leqslant x_1,\dots,X(t_n) \leqslant x_n]$$

برای اینکه همه خواص آماری فرایند $X(t)$ را مشخص کنیم نیاز داریم تابع بالا را برای همه n و x_i و t_i داشته باشیم.

در بسیاری از کاربردها اما فقط برخی امید ریاضی‌های خاص مورد نیاز است. به صورت خاص در بسیاری از موارد خواص آماری مرتبه دوم برای ما کفایت می‌کند که در ادامه درباره آنها صحبت می‌کنیم.

• امید ریاضی :

امید ریاضی فرایند تصادفی $X(t)$ که با $\mu(t)$ نشان داده می‌شود برابر است با :

$$\mu(t) = \mathbb{E}[X(t)]$$

• خودهمبستگی (auto correlation) :

این کمیت که با $R(t_1,t_2)$ نشان داده می‌شود برابر است با :

$$R(t_1,t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1\,dx_2$$

$$R(t,t) = \mathbb{E}[X(t)^2] \geq 0$$

• auto Covariance :

این کمیت که با $C(t_1,t_2)$ نشان داده می‌شود برابر است با :

$$C(t_1,t_2) = Cov[X(t_1)X(t_2)] = \mathbb{E}[(X(t_1)-\mathbb{E}[t_1])(X(t_2)-\mathbb{E}[t_2])]$$

دقت کنید که :

$$C(t,t) = Var[X(t)]$$

$$= R(t,t) - [\mu(t)]^2$$

• مثال : انتگرال فرایند تصادفی $X(t)$ که به صورت زیر تعریف شده است

$$S = \int_a^b X(t)\,dt$$

یک متغیر تصادفی است که به هر پیشامد $\omega \in \Omega$ مساحت زیر نمودار تابع $X(t,\omega)$ را از a تا b نسبت می‌دهد. اگر انتگرال فوق را به عنوان انتگرال ریمان در نظر بگیریم، برای امید ریاضی S (با استفاده از خطی بودن عملگر امید ریاضی) داریم :

$$\mu_S = \mathbb{E}[S] = \int_a^b \mathbb{E}[X(t)]\,dt = \int_a^b \mu_X(t)\,dt$$

با تعریف بالا برای S^2 داریم :

$$S^2 = \int_a^b\int_a^b X(t_1)X(t_2)\,dt_1\,dt_2$$

و در نتیجه :

$$\mathbb{E}[S^2] = \int_a^b\int_a^b \mathbb{E}[X(t_1)\cdot X(t_2)]\,dt_1\,dt_2 = \int_a^b\int_a^b R(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2$$

• اگر متغیرهای تصادفی ما مختلط باشند auto correlation را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$R_{XX}(t_1,t_2) \triangleq \mathbb{E}[X(t_1)X^*(t_2)] = R^*_{XX}(t_2,t_1)$$

تابع R_{xx} یک تابع مثبت معین (positive definite) است به معنی اینکه برای هر $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}$ و هر $t_1,\dots,t_n$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j^* R(t_i,t_j) \geq 0$$

علت این است که:

$$\sum_{i,j} a_i a_j^* R(t_i,t_j) = \sum_{i,j} a_i a_j^* \mathbb{E}[X(t_i)X^*(t_j)]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j} a_i X(t_i)\, a_j^* X^*(t_j)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left|\sum_i a_i X(t_i)\right|^2\right] \geq 0$$

- می‌توان نشان داد که عکس این قضیه هم درست است. یعنی اگر یک تابع مثبت معین $R(t_1,t_2)$ داشته باشیم می‌توانیم یک فرایند $X(t)$ با autocorrelation $R(t_1,t_2)$ بیابیم.
- به عنوان حالت خاص رابطه بالا داریم:

$$R_{xx}(t,t) = \mathbb{E}[X(t)^2] \geq 0$$

- مثال: اگر داشته باشیم $X(t) = Ae^{j\omega t}$ آنگاه:

$$R(t_1,t_2) = \mathbb{E}[Ae^{j\omega t_1} A^* e^{-j\omega t_2}] = \mathbb{E}[|A|^2]\, e^{j\omega(t_1-t_2)}$$

حال فرض کنید متغیرهای A_i ناهمبسته باشند با میانگین ۰ و واریانس σ_i^2. اگر داشته باشیم:

$$X(t) = \sum_i A_i e^{j\omega_i t}$$

(A_i و A_j ناهمبسته‌اند اگر که $\mathbb{E}[A_iA_j] = \mathbb{E}[A_i]\cdot\mathbb{E}[A_j]$)

آنگاه داریم:

$$R(t_1,t_2) = \sum_i \sigma_i^2 e^{j\omega_i(t_1-t_2)}$$

- برای فرایندهای مختلط autocovariance به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left[(X(t_1)-\mathbb{E}[X(t_1)])(X(t_2)-\mathbb{E}[X(t_2)])^*\right]$$

$$= R(t_1,t_2) - \mu(t_1)\cdot\mu^*(t_2)$$

- ضریب همبستگی فرایند $X(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$-1 \leq r(t_1,t_2) = \frac{C(t_1,t_2)}{\sqrt{C(t_1,t_1)\,C(t_2,t_2)}} \leq 1$$

ضریب همبستگی میزان وابستگی خطی بین دو متغیر تصادفی را اندازه می‌گیرد.

مقدار 1 بیان می‌کند که رابطه دو متغیر تصادفی کاملا خطی است با یک خط با شیب مثبت.

مقدار 1- مشابه مقدار 1 است ولی شیب خط منفی است.

مقدار 0 بیانگر این است که وابستگی خطی‌ای بین دو متغیر تصادفی وجود ندارد.

$$r_{X,Y} = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]\,Var[Y]}}$$

- Cross Correlation دو فرایند تصادفی $X(t)$ و $Y(t)$ برابر است با:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)\,Y^*(t_2)] = R^*_{YX}(t_2,t_1)$$

- به طور مشابه Cross Covariance دو فرایند به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{XY}(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left[(X(t)-\mathbb{E}[X(t)])(Y(t)-\mathbb{E}[Y(t)])^*\right]$$

$$= R_{XY}(t_1,t_2) - \mu_X(t_1)\,\mu^*_Y(t_2)$$

- دو فرایند $X(t)$ و $Y(t)$ متعامد هستند اگر که:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = 0 \qquad : \forall\, t_1,t_2$$

- می‌گوییم دو فرایند $X(t)$ و $Y(t)$ ناهمبسته‌اند (uncorrelated) اگر که:

$$C_{XY}(t_1,t_2) = 0 \qquad : \forall\, t_1,t_2$$

- α-dependent processes:

در حالت کلی مقادیر $X(t_1)$ و $X(t_2)$ یک فرایند تصادفی $X(t)$ به صورت آماری به ازای همه مقادیر t_1 و t_2 وابسته هستند. در بسیاری از موارد اما این وابستگی با افزایش $|t_1-t_2|\to\infty$ کاهش می‌یابد.

بنابراین می‌گوییم فرایند $X(t)$ α-dependent است اگر که همه مقادیر $X(t)$ برای $t<t_0$ و

همه مقادیر $X(t)$ برای $t > t_0 + a$ دو به دو مستقل از یکدیگر باشند. در نتیجه داریم:

$$C(t_1, t_2) = 0 \qquad \text{for} \qquad |t_1 - t_2| > a$$

(ولی لزوماً عکس این حرف درست نیست).

- فرایند $X(t)$ α-dep Correlation است اگر که auto Correlation آن خاصیت زیر را داشته باشد:

$$R(t_1, t_2) = 0 \qquad \text{for} \qquad |t_1 - t_2| > \alpha$$

- نویز سفید: می‌گوییم فرایند $X(t)$ نویز سفید است اگر که برای $t_i \neq t_j$ داشته باشیم:

$$C(t_i, t_j) = 0 \qquad : t_i \neq t_j$$

($X(t_i)$ و $X(t_j)$ ناهمبسته باشند).

اگر $X(t_i)$ و $X(t_j)$ مستقل از یکدیگر باشند به این فرایند Strictly white noise می‌گویند.

- برای auto Covariance نویز سفید داریم:

$$C(t_1, t_2) = q(t_1)\, \delta(t_1 - t_2), \qquad q(t) \geq 0$$

- استقلال فرایندها: دو فرایند $X(t)$ و $Y(t)$ مستقل هستند اگر به ازای هر n و هر $t_1, \dots, t_n$ و $t'_1, \dots, t'_n$ متغیرهای $X(t_1), \dots, X(t_n)$ و $Y(t'_1), \dots, Y(t'_n)$ مستقل از یکدیگر باشند.

- فرایندهای تصادفی ایستا (Stationary processes):

در ادامه دو تعریف برای فرایندهای ایستا معرفی می‌کنیم. تعریف اول قوی‌تر است ولی تعریف دوم برای بسیاری از کاربردها کافی است.

- Strict Sense Stationary:

فرایند تصادفی $X(t)$ SSS نامیده می‌شود اگر که خواص آماری آن نسبت به جابجایی میدا زمان تغییر نکند (invariant). این به این معنی است که فرایندهای $X(t)$ و $X(t+c)$ خواص یکسانی برای همه cها داشته باشند.

دو فرایند $X(t)$ و $Y(t)$ را توأمان ایستا می‌گویند اگر که خواص آماری مشترک $X(t)$ و $Y(t)$ برابر خواص آماری مشترک $X(t+c)$ و $Y(t+c)$ برای هر c باشد.

با استفاده از تعریف ۱ برای تابع چگالی احتمال مرتبه n ام یک فرایند SSS باید داشته باشیم:

$$f(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n) = f(x_1,\dots,x_n;t_1+c,\dots,t_n+c) \qquad : \forall c$$

به عنوان مثال برای تابع چگالی احتمال مرتبه اول داریم:

$$f(x;t) = f(x;t+c) \qquad : \forall c$$

که این به این معنی است که:

$$f(x;t) = f(x)$$

(در نتیجه امید ریاضی $X(t)$ مستقل از زمان است).

به طریق مشابه $f(x_1,x_2;t_1+c,t_2+c)$ مستقل از c است به ازای هر c و به خصوص به ازای $c=-t_2$. به این ترتیب داریم:

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2) = f(x_1,x_2;\tau) \qquad : \tau = t_1-t_2$$

بنابراین توزیع مشترک متغیرهای تصادفی $X(t)$ و $X(t+\tau)$ مستقل از مقدار t است.

(پس خود همبستگی $X(t)$ فقط به $\tau=t_1-t_2$ بستگی دارد).

- Wide Sense Stationary:

فرایند تصادفی $X(t)$، WSS نامیده می‌شود اگر که امید ریاضی آن ثابت باشد (مستقل از زمان):

$$E[X(t)] = \mu$$

و خود همبستگی (autocorrelation) آن فقط به $\tau=t_1-t_2$ بستگی داشته باشد:

$$R(t+\tau,t) = E[X(t+\tau)X^*(t)] = R(\tau)$$

از آنجایی که τ فاصله بین دو زمان t و $t+\tau$ است رابطه بالا را به صورت متقارن به شکل زیر هم می‌توان نوشت:

$$R(\tau) = E\left[X(t+\tfrac{\tau}{2})X^*(t-\tfrac{\tau}{2})\right]$$

در ضمن به صورت خاص داریم:

$$E[|X(t)|^2] = R(0)$$

به بیان دیگر گشتاور دوم (امید ریاضی توان یا توان متوسط) یک فرایند تصادفی WSS مستقل از t و برابر $R(0)$ است.

• مثال: با فرض اینکه $X(t)$ یک فرایند تصادفی ایستا با مقادیر حقیقی باشد داریم:

$$\mathbb{E}\left[\left(X(t+\tau)-X(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[X(t+\tau)^2\right] + \mathbb{E}\left[X(t)^2\right] - 2\mathbb{E}\left[X(t+\tau)X(t)\right]$$

$$= 2\left[R(0)-R(\tau)\right]$$

• با استفاده از تعاریف auto Covariance، یک فرایند WSS هم فقط به $\tau = t_1 - t_2$ بستگی دارد:

$$C(\tau) = R(\tau) - |\mu|^2$$

و ضریب همبستگی آن برابر است با:

$$r(\tau) = \frac{C(\tau)}{C(0)}$$

• دو فرایند $X(t)$ و $Y(t)$ را مشترکاً WSS (jointly) گویند اگر که هرکدام WSS باشند و همبستگی متقابل (Cross Correlation) آنها فقط به $\tau = t_1 - t_2$ بستگی داشته باشد:

$$R_{XY}(\tau) = \mathbb{E}\left[X(t+\tau)\,Y^*(t)\right]$$

$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \mu_X \mu_Y^*$$

• مثال: فرض کنید $X(t)$ یک فرایند تصادفی WSS باشد (با مقادیر حقیقی) و:

$$S = \int_{-T}^{T} X(t)\,dt$$

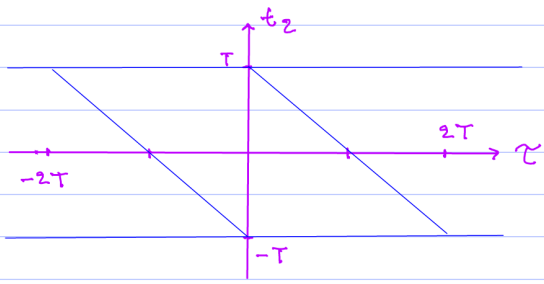
در این صورت برای واریانس S داریم:

$$\sigma_S^2 = \mathbb{E}\left[(S-\mu_S)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\Big(X(t_1)-\underbrace{\frac{\mu_S}{2T}}_{=\mu_X}\Big)\Big(X(t_2)-\underbrace{\frac{\mu_S}{2T}}_{=\mu_X}\Big)\,dt_1\,dt_2\right]$$

$$= \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C(\underbrace{t_1-t_2}_{=\tau})\,dt_1\,dt_2 \qquad \& \qquad t_1 = \tau + t_2$$

$$= \int_{-T}^{T}\int_{-T-t_2}^{T-t_2} C(\tau)\,d\tau\,dt_2$$

$$= \int_{-2T}^{2T} (2T-|\tau|)\,C(\tau)\,d\tau$$



- فرایندهای تصادفی متناوب با معیار mean square (Mean Square Periodicity):

یک فرایند $X(t)$ متناوب با معیار MS گفته می‌شود اگر یک T وجود داشته باشد که:

$$\mathbb{E}\left[\left|X(t+T)-X(t)\right|^2\right]=0 \qquad : \forall t$$

از تعریف بالا می‌توان نتیجه گرفت که برای یک t خاص با احتمال 1 داریم:

$$X(t+T)=X(t)$$

هرچند که لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که:

$$\mathbb{P}\left[\omega\in\Omega : \quad X(t+T,\omega)=X(t,\omega)\ ,\ \forall t\right]\overset{?}{=}1$$

از عبارت قبل‌تر نتیجه می‌شود که:

$$\mu_X(t+T)=\mu_X(t)$$

• قضیه: فرایند $X(t)$ متناوب با معیار MS است اگر و فقط اگر تابع خود همبستگی $R(t_1,t_2)$ doubly periodic باشد:

$$R(t_1+mT,\ t_2+nT)=R(t_1,t_2)$$

برای هر عدد صحیح m و n.

حل: می‌دانیم (نامساوی کوشی شوارتز برای متغیرهای تصادفی):

$$\left(\mathbb{E}[ZW]\right)^2\leqslant \mathbb{E}[Z^2]\cdot\mathbb{E}[W^2]$$

قرار می‌دهیم: $Z=X(t_1)$ و $W=X(t_2+T)-X(t_2)$ و داریم:

$$\mathbb{E}^2\left[X(t_1)\left\{X(t_2+T)-X(t_2)\right\}\right]\leqslant \mathbb{E}\left[X^2(t_1)\right]\cdot\mathbb{E}\left[\left\{X(t_2+T)-X(t_2)\right\}^2\right]$$

اگر $X(t)$ متناوب با معیار MS باشد در این صورت عبارت سمت راست 0 می‌شود و در نتیجه:

$$R(t_1,t_2+T)-R(t_1,t_2)=0$$

به طور مشابه تناوبی بودن نسبت به پارامتر t_1 را هم می‌توان اثبات کرد.

از طرف دیگر اگر تناوبی بودن تابع خود همبستگی را فرض کنیم داریم:

$$R(t+T,t+T)=R(t+T,t)=R(t,t)$$

بنابراین

$$\mathbb{E}\left[\left\{X(t+T)-X(t)\right\}^2\right]=R(t+T,t+T)+R(t,t)-2R(t+T,t)=0$$

پس $X(t)$ متناوب با معیار MS است.

- چند مثال برای فرایندهای ایستا:

• فرایند تصادفی iid:

فرض کنید فرایند $X(t)$ به این صورت تعریف شده باشد که

$$X(t) \sim F(x)$$

و به ازای هر n و هر $t_1, \dots, t_n$ داشته باشیم:

$$F(x_1, \dots, x_n ; t_1, \dots, t_n) = F(x_1) \cdots F(x_n)$$

چنین فرایندی را فرایند تصادفی iid می‌نامند. به وضوح با استفاده از تعریف فرایندهای SSS نتیجه می‌گیریم که چنین فرایندی با معیار SSS ایستا است.

• فرایند برنولی (Bernoulli process):

به عنوان یک مثال گسسته (در زمان) فرایندهای iid می‌توانیم به فرایند برنولی اشاره کنیم که یک دنباله Z_1 و Z_2 و ... از متغیرهای تصادفی iid است که $Z_i \in \{0,1\}$ و داریم:

$$p = \mathbb{P}[Z_i = 1] \quad \& \quad q = 1 - p = \mathbb{P}[Z_i = 0]$$

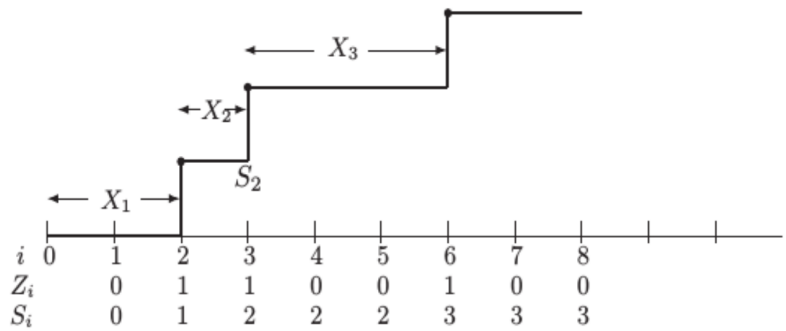


Illustration of a sample path for a Bernoulli process: the sample values of the binary rv s Z_i are shown below the time instants. The sample value of the aggregate number of arrivals, $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, is the illustrated step function, and the interarrival intervals are the intervals between steps.

اگر فاصله بین دو واقعه متوالی یک بودن را با متغیرهای X_i مطابق شکل نشان دهیم، هر متغیر تصادفی X_n توزیع هندسی دارد:

$$\mathbb{P}[X_n = i] = p(1-p)^{i-1}, \qquad i \geq 1$$

و X_n مستقل از $X_1, \dots, X_{n-1}$ است. بنابراین دنباله تصادفی X_n، iid هستند با توزیع هندسی.

(فرایند برنولی را می‌توان به عنوان دنباله X_n ها هم تعریف کرد).

برای متغیر تصادفی S_n که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

داریم:

$$\mathbb{P}[S_n = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- فرض کنید $X(t)$ یک فرایند تصادفی iid باشد و فرایند $Y(t)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$Y(t) = X(t) + 3X(t-1)$$

(در اینجا فرایند $X(t)$ را از یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان عبور داده‌ایم. در این صورت بعد نشان خواهیم داد که اگر $X(t)$ یک فرایند SSS باشد، $Y(t)$ نیز یک فرایند SSS است. البته $Y(t)$ دیگر لزوما یک فرایند iid نخواهد بود).

- نویز سفید: می‌گوییم فرایند $X(t)$ نویز سفید است اگر که برای $t_i \neq t_j$ داشته باشیم:

$$C(t_i, t_j) = 0 \qquad : t_i \neq t_j$$

($X(t_i)$ و $X(t_j)$ ناهمبسته باشند. معمولا فرض می‌کنیم میانگین نویز سفید ۰ است: $\mu(t) = 0$).

اگر $X(t_i)$ و $X(t_j)$ مستقل از یکدیگر باشند به این فرایند Strictly white noise می‌گویند.

- برای auto-Covariance نویز سفید داریم:

$$C(t_1, t_2) = q(t_1)\, \delta(t_1 - t_2), \qquad q(t) \geq 0$$

- نویز سفید برای فرایندهای گسسته در زمان نیز به طور مشابهی تعریف می‌شود.
- توجه کنید که می‌توانیم نویز سفید با توزیع‌های مختلف داشته باشیم. مثلا نویز سفید گاوسی یا پواسن و ...

- Ergodicity :

یکی از مباحث مهم در زمینه فرایندهای تصادفی تخمین پارامترهای آماری فرایند فوق به حسب داده‌های مشاهده شده است. در بسیاری از موارد چنین تخمین‌هایی برای توان به صورت امید ریاضی یک تابعی از فرایند تصادفی $X(t)$ بیان کرد (در اصل به جای تابع باید بگوییم functional).

برای شروع فرض کنید می‌خواهیم امید ریاضی فرایند $X(t)$ را برای یک زمان خاص تخمین بزنیم. امید ریاضی $X(t)$ به صورت زیر است:

$$\mu(t) = \mathbb{E}[X(t)]$$

برای تخمین $\mu(t)$ برای یک t خاص می‌توانیم n مشاهده $X(t,w_i)$ را از فرایند $X(t)$ انجام دهیم و تخمین نقطه‌ای $\mathbb{E}[X(t)]$ را به صورت میانگین زیر بنویسیم:

$$\hat{\mu}(t) = \frac{1}{n}\sum_i X(t,w_i)$$

در جلسات قبل دیدیم که با استفاده از قانون اعداد بزرگ مقدار تخمین $\hat{\mu}(t)$ به $\mu(t)$ میل می‌کند، البته به شرطی که تعداد مشاهدات ما به اندازه کافی زیاد باشد.

در بسیاری از کاربردها ما فقط به یک مسیر نمونه از فرایند $X(t)$ دسترسی داریم. سوال مهم در چنین شرایطی این است که آیا می‌توان $\mu(t)$ را برحسب متوسط زمانی یک مسیر نمونه تخمین زد.

- فرایندهای Mean-Ergodic :

فرض کنید $X(t)$ یک فرایند حقیقی ایستا باشد و ما می‌خواهیم میانگین $\mu = \mathbb{E}[X(t)]$ را تخمین بزنیم.

میانگین زمانی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\mu_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\,dt$$

با این تعریف μ_T یک متغیر تصادفی است که امید ریاضی آن برابر است با:

$$\mathbb{E}[\mu_T] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathbb{E}[X(t)]\,dt = \mu$$

پس μ_T یک تخمینگر بدون بایاس برای μ است (بعدا بیشتر راجع به تخمینگرها صحبت خواهیم کرد).

اگر شرایط به گونه‌ای باشد که:

$$\lim_{T\to\infty} \sigma_T^2 = 0$$

آنگاه $\mu_T \to \mu$ با معیار mean square. در این صورت متوسط زمانی $\mu_T(w)$ که از یک مسیر نمونه محاسبه شده است با احتمال خیلی نزدیک به 1 نزدیک به مقدار μ است.

• تعریف: اگر شرط بالا برقرار باشد می‌گوییم فرایند $X(t)$ یک فرایند mean-ergodic است.

به بیان دیگر فرایند $X(t)$ ، mean-ergodic است اگر که متوسط زمانی μ_T با افزایش T به متوسط گروهی μ میل کند.

برای بررسی این نوع از ergodicity کافی است که مقدار σ_T^2 را بیابیم و نشان دهیم

$$\lim_{T\to\infty} \sigma_T^2 = 0$$

• مثال: فرض کنید A یک متغیر تصادفی با امید ریاضی μ_A باشد و فرایند $X(t)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$X(t) = A \quad : \forall t$$

$$\Rightarrow \mu = \mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[A] = \mu_A$$

در این صورت $X(t)$ یک خانواده از خط‌های مستقیم است و داریم: $\mu_T = A$.

برای یک پیشامد خاص $\omega \in \Omega$ ، داریم: $\mu_T(\omega) = A(\omega)$ که یک عدد ثابتی است که در حالت کلی با متفاوت از μ است (اگر که $A(\omega) \neq \mu$). بنابراین $X(t)$ ، mean-ergodic نیست.

• مثال: فرض کنید $X_1(t)$ و $X_2(t)$ دو فرایند mean-ergodic با امید ریاضی‌های μ_1 و μ_2 باشند و جمع زیر را تشکیل دهیم:

$$X(t) = X_1(t) + A X_2(t)$$

که A یک متغیر تصادفی است که مستقل از $X_2(t)$ است و مقادیر ۰ و ۱ را با احتمال $\frac{1}{2}$ می‌گیرد.

به وضوح داریم:

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2$$

اگر $A(\omega)=0$ برای یک ω خاص باشد، در این صورت $X(t,\omega) = X_1(t,\omega)$ و در نتیجه:

$$\lim_{T\to\infty} \mu_T = \mu_1$$

اگر $A(\omega')=1$ برای یک ω' خاص باشد، در این صورت:

$$\lim_{T\to\infty} \mu_T = \mu_1 + \mu_2$$

پس فرایند $X(t)$ ، mean-ergodic نیست.

• برای مشخص کردن σ_T^2 (واریانس) متوسط زمانی μ_T به صورت زیر عمل می‌کنیم.

(فرض می‌کنیم فرایند $X(t)$ ایستا و حقیقی باشد):

$$\sigma_T^2 = Var[\mu_T] = \mathbb{E}[\mu_T^2] - \mathbb{E}[\mu_T]^2 = \mathbb{E}[\mu_T^2] - \mu^2$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} X(t_1)X(t_2)\,dt_1\,dt_2\right] - \mu^2$$

$$= \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R(t_1-t_2)\,dt_1\,d_2 - \mu^2$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R(\tau)\,d\tau - \mu^2$$

توجه کنید:

$$\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)d\tau = 2T$$

پس:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)C(\tau)\,d\tau$$

و می‌توانیم نتیجه زیر را بگیریم:

• قضیه: یک فرایند (حقیقی و ایستای) $X(t)$ با auto Covariance $C(\tau)$ یک فرایند mean-ergodic است اگر و فقط اگر:

$$\frac{1}{T}\int_0^{2T} C(\tau)\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)d\tau \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

• قضیه (Slutsky):

فرایند (حقیقی و ایستای) $X(t)$، mean-ergodic است اگر و فقط اگر:

$$\frac{1}{T}\int_0^{T} C(\tau)\,d\tau \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

(برای اثبات به فصل 12 کتاب پاپولیس مراجعه کنید).

• شرایط کافی برای mean-ergodic بودن یک فرایند تصادفی:

- $\int_0^{\infty} C(\tau)\,d\tau < \infty$

- $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau) = 0$

یعنی متغیرهای $X(t)$ و $X(t+\tau)$ برای τ های بزرگ نا همبسته باشند.

• مثال: فرایند زیر را در نظر بگیرید:

$$X(t) = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t + C$$

فرض کنید: $\mathbb{E}[AB] = \mathbb{E}[A]\cdot\mathbb{E}[B]$, $\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[B] = 0$, $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$

در این صورت $X(t)$ یک فرایند WSS است زیرا:

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[A]\cos\alpha t + \mathbb{E}[B]\sin\alpha t + \mathbb{E}[C] = C$$

مستقل از زمان است.

همچنین برای خود همبستگی $X(t)$ داریم:

$$R(t_1,t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$$

$$= \mathbb{E}\left[(A\cos\alpha t_1 + B\sin\alpha t_1 + C)(A\cos\alpha t_2 + B\sin\alpha t_2 + C)\right]$$

$$= \sigma^2\cos\alpha t_1\cos\alpha t_2 + \sigma^2\sin\alpha t_1\sin\alpha t_2$$

$$= \sigma^2\cos\alpha(t_1-t_2) = \sigma^2\cos\alpha\tau$$

حال نشان می‌دهیم $X(t)$ یک فرایند mean-ergodic است زیرا:

$$\frac{1}{T}\int_0^T C(\tau)\,d\tau = \frac{\sigma^2}{T}\int_0^T \cos\alpha\tau\,d\tau = \frac{\sigma^2}{\alpha T}\sin\alpha T \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

• فرایندهای Covariance-Ergodic:

فرض کنید $X(t)$ یک فرایند SSS باشد. می‌خواهیم شرایطی را بدست بیاوریم که auto-Covariance $C(\lambda)$ فرایند $X(t)$ را بتوان به عنوان یک متوسط زمانی تخمین زد.

برای سادگی فرض می‌کنیم $\mathbb{E}[X(t)]=0$ (اگر μ را بدانیم و $\mu\neq 0$ فرایند $X(t)-\mu$ را در نظر می‌گیریم.

اگر مقدار μ معلوم نباشد ابتدا μ_T را محاسبه می‌کنیم و از آن به عنوان تخمینی برای μ استفاده می‌کنیم.

در این حالت فرایند جدید $X(t)-\mu_T$ را در نظر می‌گیریم، هرچند جواب ما در این صورت تقریبی است ولی این تقریب با افزایش T بهتر و بهتر می‌شود).

برای یک λ مشخص، فرایند $X(t+\lambda)X(t)$ یک فرایند SSS است که امید ریاضی آن $C(\lambda)$ است.

بنابراین می‌توانیم از متوسط زمانی زیر برای تقریب زدن $C(\lambda)$ استفاده کنیم:

$$C_T(\lambda) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \underbrace{[X(t+\lambda)X(t)]}_{=Z(t)}\,dt$$

حال واریانس متغیر تصادفی $C_T(\lambda)$ توسط عبارتی که قبلا محاسبه کرده ایم، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^2_{C_T(\lambda)} = \frac{1}{T}\int_0^{2T} C_{ZZ}(\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2T}\right)d\alpha$$

که $C_{ZZ}(\alpha)$ به صورت زیر است:

$$C_{ZZ}(\alpha) = \mathbb{E}\left[X(t+\lambda+\alpha)X(t+\alpha)X(t+\lambda)X(t)\right] - \underbrace{C^2(\lambda)}_{=\mathbb{E}[Z]^2}$$

با اعمال کردن قضیه Slutsky، نتیجه زیر را داریم:

- قضیه: فرایند $X(t)$، Covariance-ergodic است اگر و فقط اگر:

$$\frac{1}{T}\int_0^T C_{ZZ}(\alpha)\,d\alpha \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

توجه کنید که برای بررسی درستی عبارت بالا به قواعد آماری مرتبه چهارم فرایند $X(t)$ نیاز داریم.

* بررسی سیستم ها با ورودی های تصادفی

برای یک فرایند تصادفی $X(t)$ فرض کنید به هر مسیر نمونه $X(t,\omega_i)$ توسط قاعده‌ای خاص تابع $Y(t,\omega_i)$ را نسبت دهیم. به این ترتیب یک فرایند جدید به صورت زیر ساختیم:

$$Y(t) = T[X(t)]$$

که مسیرهای نمونه‌اش توابع $Y(t,\omega_i)$ هستند. با این تعریف فرایند $Y(t)$ را می‌توان به عنوان خروجی یک سیستم که ورودی‌اش فرایند $X(t)$ است در نظر گرفت. این سیستم به طور کامل توسط عملگر $T[\cdot]$ که قاعده‌ای بین مسیرهای نمونه ورودی و خروجی بیان می‌کند، توصیف می‌شود.

اگر سیستم فوق غیر تصادفی (deterministic) باشد، فقط بر روی متغیر t عمل می‌کند و ω را به عنوان یک پارامتر در نظر می‌گیرد. این به این معنی است که

$$X(t,\omega_1) = X(t,\omega_2) \Longrightarrow Y(t,\omega_1) = Y(t,\omega_2)$$

می‌گوییم سیستم ما تصادفی (Stochastic) است اگر که T بر هر دو متغیر t و ω عمل کند. بنابراین

$$X(t,\omega_1) = X(t,\omega_2) \not\Longrightarrow Y(t,\omega_1) = Y(t,\omega_2)$$

در ادامه فرض می‌کنیم سیستم‌های ما غیر تصادفی باشند.

با دانستن عملگر T قاعدتا باید بتوانیم خواص آماری خروجی سیستم را به حسب خواص آماری ورودی و عملگر T تعیین کنیم. در حالت کلی ولی این کار ممکن خیلی سخت باشد. در ادامه به دو حالت خاص مهم می‌پردازیم.

- سیستم های بدون حافظه:

یک سیستم بدون حافظه است اگر خروجی آن به صورت زیر به ورودی مربوط باشد:

$$Y(t) = g[X(t)]$$

که در اینجا $g(x)$ تابعی از x است. به این ترتیب در هر زمان $t=t_1$ خروجی $Y(t_1)$ فقط به ورودی در همان زمان t_1 بستگی دارد و به مقدیر گذشته یا آینده $X(t)$ بستگی ندارد.

اگر فرض کنیم که توابع چگالی احتمال مرتبه اول ورودی و خروجی وجود داشته باشند می‌توانیم $f_Y(y;t)$ را برحسب $f_X(x;t)$ بنویسیم.

• داخل پرانتز: برای اینکار ابتدا معادله $y=g(x)$ را حل می‌کنیم. فرض کنید $x_1, x_2, \dots$ جواب های

این معادله باشند. یعنی داشته باشیم:

$$y = g(x_1) = g(x_2) = \cdots$$

در این صورت داریم:

$$f_Y(y;t) = \frac{f_X(x_1;t)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2;t)}{|g'(x_2)|} + \cdots$$

به طور خاص برای امید ریاضی خروجی $Y(t)$ داریم:

$$\mathbb{E}[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x;t)\, dx$$

با توجه به اینکه $Y(t_1)=g(X(t_1))$ و $Y(t_2)=g(X(t_2))$ تابع چگالی مرتبه دوم $f_Y(y_1,y_2;t_1,t_2)$ را نیز می‌توان برحسب تابع چگالی مرتبه دوم ورودی یعنی $f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$ نوشت.

مانند قبل در اینجا نیز برای خود همبستگی خروجی داریم:

$$R_{YY}(t_1,t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1)g(x_2)\, f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\, dx_1\, dx_2$$

توزیع های مرتبه بالاتر $Y(t)$ را هم به طریق مشابهی می‌توان محاسبه نمود. در اینجا تبدیلی که باید در نظر بگیریم به صورت زیر است:

$$Y(t_1)=g[X(t_1)],\ \cdots,\ Y(t_n)=g[X(t_n)]$$

- قضیه: فرض کنید ورودی یک سیستم بی‌حافظه فرایند SSS $X(t)$ باشد. در این صورت خروجی سیستم هم یک فرایند SSS است.

حل: برای مشخص کردن تابع چگالی احتمال مرتبه n-ام $Y(t)$، ابتدا دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$g(x_1)=y_1,\ \cdots,\ g(x_n)=y_n$$

اگر دستگاه فوق یک جواب داشته باشد داریم (به معادله 7-8 کتاب پاپولیس مراجعه کنید):

$$f_Y(y_1,\cdots,y_n;t_1,\cdots,t_n) = \frac{f_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)}{|g'(x_1)\cdots g'(x_n)|}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید مخرج عبارت بالا به t_i ها بستگی ندارد. بنابراین اگر همه t_i ها را به اندازه c جابجا کنیم عبارت سمت راست تغییر نمی‌کند بنابراین $Y(t)$ هم یک فرایند SSS می‌شود.

اگر دستگاه معادلات فوق چندین جواب داشته باشد استدلال بالا برای هرکدام از جواب های سمت

راست معادله بالا صدق می‌کند.

- سیستم‌های خطی:

می‌گوییم سیستم $L[\cdot]$ خطی است اگر که برای هر a_1 و a_2 و $X_1(t)$ و $X_2(t)$ داشته باشیم:

$$L[a_1 X_1(t) + a_2 X_2(t)] = a_1 L[X_1(t)] + a_2 L[X_2(t)]$$

(چون فرض کرده‌ایم که سیستم ما غیر تصادفی است، بنابراین در تعریف بالا ضرایب a_1 و a_2 می‌توانند متغیرهای تصادفی هم باشند).

- می‌گوییم یک سیستم نامتغیر با زمان است اگر که پاسخ آن به $X(t+c)$ برابر باشد با $Y(t+c)$. در ادامه فرض می‌کنیم که سیستم خطی مورد بررسی، نامتغیر با زمان هستند.

از مطالعه سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان می‌دانیم که می‌توان سیستم را توسط پاسخ‌ضربه توصیف کرد. اگر

$$h(t) = L[\delta(t)]$$

آنگاه:

$$Y(t) = (X * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\alpha)\, h(\alpha)\, d\alpha$$

که به کانولوشن $X(t)$ و $h(t)$ معروف است.

- نکته: اگر ورودی $X(t)$ به یک سیستم متغیر ناپذیر با زمان یک فرایند SSS باشد خروجی $Y(t)$ نیز یک فرایند SSS است.

فرض کنید سیستم تغییرناپذیر با زمان را با عملگر $T[\cdot]$ نشان دهیم:

$$\mathbb{P}[T[X(t)](t_1) \leq y_1, \dots, T[X(t)](t_n) \leq y_n] \overset{?}{=} \mathbb{P}[T[X(t)](t_1+c) \leq y_1, \dots, T[X(t)](t_n+c) \leq y_n]$$

$$= \mathbb{P}[T[X(t-c)](t_1) \leq y_1, \dots, T[X(t-c)](t_n) \leq y_n]$$

$$= \mathbb{P}[T[X(t)](t_1) \leq y_1, \dots, T[X(t)](t_n) \leq y_n]$$

حال می‌خواهیم با داشتن مشخصات آماری ورودی، مشخصات آماری در خروجی یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان را بیابیم.

- قضیه (امید ریاضی $Y(t)$): برای یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان داریم:

$$E[L[X(t)]] = L[E[X(t)]]$$

حل: داریم

$$\mu_Y(t) = E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(t-\alpha)\, h(\alpha)\, d\alpha\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t-\alpha)]\, h(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \mu_X(t) * h(t) = L[\mu_X(t)]$$

- مثال: فرض کنید فرایند $X(t)$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$X(t) = f(t) + N(t)$$

که $f(t)$ یک تابع غیر تصادفی و $N(t)$ یک فرایند تصادفی باشد با امید ریاضی 0: $E[N(t)]=0$.

اگر $X(t)$ ورودی یک سیستم LTI با تابع ضربه $h(t)$ باشد، برای امید ریاضی خروجی داریم:

$$\mu_Y(t) = f(t) * h(t)$$

- خود همبستگی خروجی یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان:

هدف ما اینست که خود همبستگی $R_{YY}(t_1,t_2)$ را بر حسب $R_{XX}(t_1,t_2)$ و تابع ضربه سیستم بیان کنیم.

برای راحتی این کار را در دو مرحله انجام می‌دهیم. ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = L_2[R_{XX}(t_1,t_2)]$$

(L_2 به معنی این است که سیستم L بر روی پارامتر دوم خود همبستگی عمل می‌کند).

سپس اثبات می‌کنیم:

$$R_{YY}(t_1,t_2) = L_1[R_{XY}(t_1,t_2)]$$

حل:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1)\,Y(t_2)] = E\left[X(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} X(t_2-\alpha)\, h(\alpha)\, d\alpha\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t_1)\,X(t_2-\alpha)]\, h(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t_1,t_2-\alpha)\, h(\alpha)\, d\alpha$$

$$= R_{XX}(t_1,t_2) * h(t_2) = L_2[R_{XX}(t_1,t_2)]$$

↳ operates over t_2

اثبات قسمت دوم هم به صورت مشابهی انجام می‌شود.

در نهایت می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم:

$$R_{YY}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_1,t_2) * h(t_1) * h(t_2) = L_1 L_2 \left[R_{XX}(t_1,t_2) \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t_1-\alpha, t_2-\beta)\, h(\alpha)\, h(\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

- به طریق مشابه می‌توان نشان داد:

$$C_{XY}(t_1,t_2) = C_{XX}(t_1,t_2) * h(t_2)$$

$$C_{YY}(t_1,t_2) = C_{XY}(t_1,t_2) * h(t_1)$$

- قضیه: اگر ورودی یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان یک فرایند WSS باشد خروجی آن نیز WSS است.

اثبات: ابتدا برای امید ریاضی $Y(t)$ داریم:

$$\mu_Y(t) = E[Y(t)] = \mu_X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mu_X(t-\alpha)}_{=\mu_X} h(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\, d\alpha \quad : \quad \text{independent of time}$$

حال برای خود همبستگی $Y(t)$ می‌نویسیم:

$$R_{YY}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{R_{XX}(t_1-\alpha, t_2-\beta)}_{=R_{XX}(t_1-\alpha-t_2+\beta)} h(\alpha)\, h(\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

$$= R_{YY}(t_1-t_2)$$

علاوه بر قضیه بالا، همچنین می‌توانیم نشان دهیم فرایندهای $X(t)$ و $Y(t)$ مشترک WSS هستند (یعنی هرکدام WSS هستند و همبستگی متقابل آنها هم فقط به $\tau = t_1 - t_2$ بستگی دارد).

اثبات:

$$R_{XY}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_1,t_2) * h(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{R_{XX}(t_1, t_2-\alpha)}_{=R_{XX}(t_1-t_2+\alpha)} h(\alpha)\, d\alpha$$

$$= R_{XY}(t_1-t_2)$$

• مثال: فرض کنید ورودی یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان نویز سفید $N(t)$ با تابع خودهمبستگی زیر باشد:

$$R_{NN}(t_1,t_2) = q(t_1)\,\delta(t_1-t_2)$$

در این صورت داریم (با فرض مختلط بودن فرایندها و سیستم):

$$\mathbb{E}\left[|Y(t)|^2\right] = q(t) * |h(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} q(t-\alpha)\,|h(\alpha)|^2\,d\alpha$$

اثبات: می‌نویسیم

$$R_{XY}(t_1,t_2) = q(t_1)\,\delta(t_2-t_1) * h^*(t_2) = q(t_1)\,h^*(t_2-t_1)$$

$$R_{YY}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1,t_2) * h(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t_1-\alpha)\,h^*(t_2-(t_1-\alpha))\,h(\alpha)\,d\alpha$$

$$t_1=t_2=t \implies \mathbb{E}\left[|Y(t)|^2\right] = R_{YY}(t,t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t-\alpha)\,|h(\alpha)|^2\,d\alpha$$

• مثال: سیستم مشتق‌گیر

مشتق‌گیر یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان است که خروجی مشتق سیگنال ورودی است:

$$L[X(t)] = X'(t)$$

بنابراین از نتایج قسمت قبل استفاده می‌کنیم تا امید ریاضی و خودهمبستگی مشتق فرایند $X(t)$ را بیابیم.

برای امید ریاضی $X'(t)$ داریم:

$$\mu_{X'}(t) = L[\mu_X(t)] = [\mu_X(t)]'$$

همچنین داریم:

$$R_{XX'}(t_1,t_2) = L_2[R_{XX}(t_1,t_2)] = \frac{\partial R_{XX}(t_1,t_2)}{\partial t_2}$$

$$R_{X'X'}(t_1,t_2) = L_1[R_{XX'}(t_1,t_2)] = \frac{\partial R_{XX'}(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 R_{XX}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

به عنوان مثال اگر فرایند $X(t)$، WSS باشد آنگاه $\mu_X(t)$ ثابت است و بنابراین $\mathbb{E}[X'(t)]=0$

علاوه بر آن چون $R_{XX}(t_1,t_2)=R_{XX}(t_1-t_2)$ است (با تعریف $\tau=t_1-t_2$) داریم:

$$\frac{\partial R_{XX}(t_1-t_2)}{\partial t_2} = -\frac{dR_{XX}(\tau)}{d\tau} \implies \frac{\partial^2 R_{XX}(t_1-t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = -\frac{d^2 R_{XX}(\tau)}{d\tau^2}$$

$$R_{X'X'}(\tau) = -R''_{XX}(\tau)$$

پس $X'(t)$ هم یک فرایند WSS است.

* طیف توان (Power Spectrum)

در تئوری سیگنال ها، طیف (Spectrum) به تبدیل فوریه نسبت داده می‌شود. برای سیگنال های غیر متصادفی، طیف (یا به عبارت دیگر تبدیل فوریه سیگنال) بیانگر سیگنال برحسب جمع توابع نمایی است.

در این بخش به معرفی طیف توان برای فرایندهای WSS و بررسی خواص آن می پردازیم.

- تعریف (طیف توان):

طیف توان یک فرایند WSS $X(t)$ (حقیقی یا مختلط) به صورت تبدیل فوریه $S(\alpha)$ تابع خودهمبستگی

$$R(\tau)=\mathbb{E}\left[X(t+\tau)\,X^{*}(t)\right]$$

تعریف می‌شود:

$$S(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j\alpha\tau}\, d\tau$$

از آنجا که $R(-\tau)=R^{*}(\tau)$ در نتیجه $S(\alpha)$ یک تابع حقیقی از α است.

با توجه به رابطه عکس تبدیل فوریه (Fourier inversion formula) داریم:

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha)\, e^{j\alpha\tau}\, d\alpha$$

اگر $X(t)$ یک فرایند حقیقی باشد، $R(\tau)$ یک تابع حقیقی و زوج است. در نتیجه $S(\alpha)$ نیز یک تابع حقیقی و زوج است.

- قضیه: برای هر تابع دلخواه مثبت (حقیقی) $S(\alpha)$، می‌توانیم یک فرایند $X(t)$ با طیف توان $S(\alpha)$ بیابیم.

اثبات: فرایند زیر را در نظر بگیرید:

$$X(t)=a\,e^{j(\alpha t-\varphi)}$$

که $a\in\mathbb{R}$ یک عدد ثابت، α یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f_{\alpha}(\alpha)$ و φ یک متغیر تصادفی مستقل از α با توزیع یکنواخت در بازه $[0,2\pi]$ است. به سادگی می‌توان بررسی کرد که $X(t)$ یک فرایند WSS با امید ریاضی 0 و خودهمبستگی به صورت زیر است:

$$R_{XX}(\tau)=a^{2}\mathbb{E}\left[e^{j\alpha\tau}\right]=a^{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha}(\alpha)\, e^{j\alpha\tau}\, d\alpha$$

با استفاده از رابطه بالا و یکتایی تبدیل فوریه، نتیجه می‌گیریم که طیف توان $X(t)$ برابر است با:

$$S_{X}(\alpha)=2\pi a^{2} f_{\alpha}(\alpha)$$

بنابراین اگر داشته باشیم:

$$f_\alpha(\alpha) = \frac{S(\alpha)}{2\pi a^2}$$

$$a^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\alpha)\,d\alpha = R(0)$$

در این صورت $f_\alpha(\alpha)$ یک تابع چگالی احتمال است و داریم: $S_X(\alpha) = S(\alpha)$.

• با استدلال مشابهی می‌توان نشان داد که اگر علاوه بر مثبت بودن $S(\alpha)$ داشته باشیم

$$S(-\alpha) = S(\alpha)$$

آنگاه می‌توانیم یک فرایند حقیقی با طیف $S(\alpha)$ بسازیم. برای اینکار تعریف می‌کنیم

$$Y(t) = a\cos(\alpha t + \varphi)$$

در این صورت اگر $f_\alpha(\alpha) = \frac{S(\alpha)}{2a^2}$ آنگاه $S_Y(\alpha) = S(\alpha)$.

- مثال: فرایند زیر را در نظر بگیرید:

$$X(t) = C_i\, e^{j\alpha_i t}$$

اگر متغیرهای تصادفی C_i ناهمبسته باشند و امید ریاضی آنها صفر باشد، آنگاه $X(t)$ WSS است.

در این صورت برای تابع خودهمبستگی $X(t)$ داریم:

$$R_{XX}(\tau) = \sum_i \sigma_i^2\, e^{j\alpha_i \tau}$$

در نتیجه:

$$S_X(\alpha) = 2\pi \sum_i \sigma_i^2\, \delta(\omega - \omega_i)$$

- نکته: جدول زیر تبدیل فوریه چند تابع مشهور را بیان می‌کند:

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega\tau}\,d\omega \leftrightarrow S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

$\delta(\tau) \leftrightarrow 1$	$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\beta\tau} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\beta)$	$\cos\beta\tau \leftrightarrow \pi\delta(\omega-\beta)+\pi\delta(\omega+\beta)$
$e^{-\alpha\lvert\tau\rvert} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha\tau^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\omega^2/4\alpha}$

$$e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau \leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-\beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2}$$

$$2e^{-\alpha\tau^2}\cos\beta\tau \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left[e^{-(\omega-\beta)^2/4\alpha} + e^{-(\omega+\beta)^2/4\alpha}\right]$$

$$\begin{cases} 1-\frac{|\tau|}{T} & |\tau| < T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases} \leftrightarrow \frac{4\sin^2(\omega T/2)}{T\omega^2}$$

$$\frac{\sin\sigma\tau}{\pi\tau} \leftrightarrow \begin{cases} 1 & |\omega| < \sigma \\ 0 & |\omega| > \sigma \end{cases}$$

- طیف توان خروجی یک سیستم خطی متغیر ناپذیر با زمان

سیستم خطی متغیر ناپذیر با زمان با پاسخ ضربه $h(t)$ را در نظر بگیرید. دیدیم که اگر فرایند ورودی $X(t)$ اعمال شده به سیستم WSS باشد، روابط زیر برقرار هستند:

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h^*(-\tau)$$

$$R_{YY}(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(\tau)$$

در نتیجه با استفاده از خاصیت تبدیل فوریه داریم:

$$S_{XY}(\alpha) = S_{XX}(\alpha)\, H^*(\alpha)$$

$$S_{YY}(\alpha) = S_{XY}(\alpha)\, H(\alpha)$$

$$= S_{XX}(\alpha) \cdot |H(\alpha)|^2$$

- خاصیت فیلتر کردن یک سیستم LTI وقتی ورودی سیستم یک فرایند تصادفی باشد

برای گشتاور دوم فرایند خروجی سیستم، $Y(t)$ داریم:

$$E[|Y(t)|^2] = R_{YY}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\alpha)\, |H(\alpha)|^2\, d\alpha$$

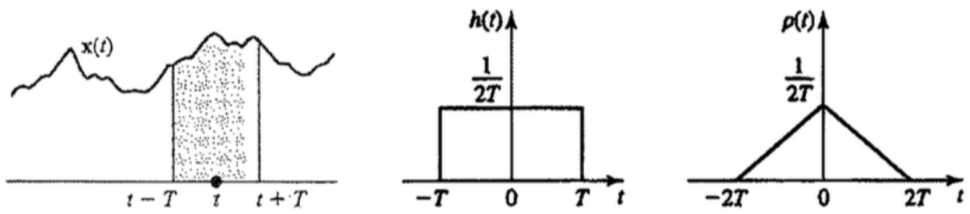
به عنوان مثال اگر $H(\alpha)=0$ برای $|\alpha|>\alpha_0$ و $S_{XX}(\alpha)=0$ برای $|\alpha|<\alpha_0$، در این صورت $E[|Y(t)|^2]=0$، یعنی $Y(t)$ با معیار MS برابر ۰ است.

- مثال (Moving Average)

انتگرال

$$Y(t) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} X(\tau)\, d\tau$$

مقدار میانگین فرایند $X(t)$ در بازه $[t-T, t+T]$ است. می‌توانیم $Y(t)$ را به عنوان خروجی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه پالس مستطیلی (مطابق شکل) در نظر بگیریم.



برای این سیستم تابع $p(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau)$ تابعی مثلثی مطابق شکل است. در این صورت داریم:

$$H(\alpha) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-j\alpha\tau}\, d\tau = \frac{\sin T\alpha}{T\alpha}$$

بنابراین:

$$S_{YY}(\alpha) = S_{XX}(\alpha)\,\frac{\sin^2 T\alpha}{T^2\alpha^2}$$

باتوجه به رابطه بدست آمده برای $H(\alpha)$ ، این تابع مقادیر ناچیزی در خارج از بازه $[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}]$ به خود می‌گیرد. بنابراین این سیستم فرکانس های بالا را تضعیف می‌کند و به نوعی شبیه یک فیلتر پایین گذر عمل می‌کند.

• مثال (مشتق‌گیر):

مشتق $X'(t)$ فرایند $X(t)$ را می‌توان به عنوان پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $X(t)$ با پاسخ فرکانسی $H(\alpha)=j\alpha$ در نظر گرفت. در این صورت داریم:

$$S_{XX'}(\alpha) = -j\alpha\, S_{XX}(\alpha)$$

$$S_{X'X'}(\alpha) = \alpha^2 S_{XX}(\alpha)$$

بنابراین روابطی که قبلا بدست آوردیم را می‌توانیم به این طریق نیز بدست آوریم:

$$R_{XX'}(\tau) = -\frac{dR_{XX}(\tau)}{d\tau}$$

$$R_{X'X'}(\tau) = -\frac{dR_{XX}(\tau)}{d\tau}$$

- قضیه (Wiener-khinchin)

با استفاده از عکس تبدیل فوریه می‌نویسیم:

$$\mathbb{E}[|X(t)|^2] = R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha)\,d\alpha \geq 0$$

این رابطه نشان می‌دهد که مساحت زیر نمودار طیف توان هر فرایندی (هر فرایند WSS) مثبت است.

علاوه بر این قضیه فوق بیان می‌کند که برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم:

$$S(\alpha) \geq 0$$

اثبات: یک فیلتر ایده‌آل میان‌گذر با پاسخ فرکانسی مطابق زیر در نظر بگیرید:

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

و فرایند $X(t)$ را به ورودی آن اعمال کنید. طیف توان خروجی $Y(t)$ این سیستم برابر است با:

$$S_{YY}(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) & \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

بنابراین:

$$0 \leqslant \mathbb{E}\left[|Y(t)|^2\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} S(\alpha)\,d\alpha$$

پس مساحت زیر تابع $S(\alpha)$ در هر بازه‌ای مثبت است و این به شرطی برقرار است که برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم: $S(\alpha) \geqslant 0$.

• نتیجه: قبلا نشان داده بودیم که اگر تابع $S(\alpha)$ مثبت باشد می‌توانیم فرایندی بیابیم که $S(\alpha)$ طیف توان آن باشد. با استفاده از این نتیجه و قضیه بالا نتیجه می‌گیریم تابع $S(\alpha)$ طیف توان است اگر و فقط اگر $S(\alpha) \geqslant 0$.

- خواص تابع خودهمبستگی

با توجه به مطالب گفته شده، شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $R(\tau)$ تابع خودهمبستگی یک فرایند متصادفی (WSS) باشد اینست که تبدیل فوریه آن مثبت باشد.

می‌توان نشان داد که شرط معادل شرط بالا اینست که تابع $R(\tau)$ مثبت معین باشد، یعنی $R(\tau)$ تابع خودهمبستگی یک فرایند متصادفی است اگر و فقط اگر:

$$\sum_{i,j} a_i a_j^* R(\tau_i - \tau_j) \geqslant 0$$

برای هر a_i، a_j، τ_i و τ_j.

- تعریف (تعبیر) دیگری برای طیف توان

برای تعریف طیف توان یک فرایند ایستای پیوسته $X(t)$، ابتدا فرایند زیر را در نظر می‌گیریم:

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t) & : \ -T \leqslant t \leqslant T \\ 0 & : \ \text{otherwise} \end{cases}$$

(این فرایند به صورت قدر مطلق انتگرال پذیر است ($[-T,T]$ Compact Support due to the).

توان متوسط فرایند $X(t)$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم (توجه کنید P یک متغیر متصادفی است):

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\underbrace{\int_{-T}^{T} |X(t)|^2\,dt}_{\text{انرژی } X(t) \text{ در بازه } [-T,T] \ =}$$

از طرفی برای تبدیل فوریه فرایند $X_T(t)$ داریم:

$$\hat{X}_T(\alpha) = \int_{-T}^{T} X_T(t)\, e^{-j\alpha t}\,dt$$

با استفاده از رابطه پارسوال می‌نویسیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}_T(\alpha)|^2 d\alpha$$

$$\int_{-T}^{T} |x_T(t)|^2 dt =$$

پس برای توان متوسط $x(t)$ داریم:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}_T(\alpha)|^2 d\alpha$$

و برای امید ریاضی توان متوسط P داریم:

$$\mathbb{E}[P] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{|\hat{x}_T(\alpha)|^2}{2T}\right]\right) d\alpha$$

به این ترتیب عبارت داخل انتگرال را می‌توانیم به عنوان تعریف طیف توان در نظر بگیریم، یعنی:

$$S(\alpha) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{|\hat{x}_T(\alpha)|^2}{2T}\right]$$

• رابطه طیف توان و تابع خودهمبستگی:

عبارت بالا را به شکل زیر می‌نویسیم:

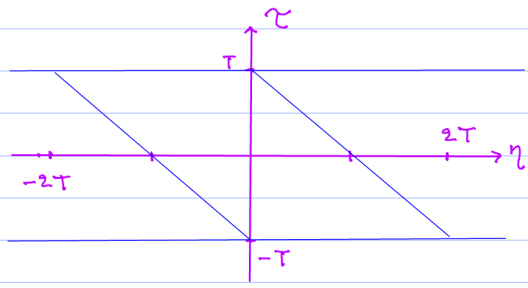
$$S(\alpha) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{|\hat{x}_T(\alpha)|^2}{2T}\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\mathbb{E}\left[\int_{-T}^{T} x(t)e^{-j\alpha t}dt \int_{-T}^{T} x^*(\tau)e^{j\alpha\tau}d\tau\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \mathbb{E}[x(t)x^*(\tau)]\, e^{-j\alpha(t-\tau)}dt\,d\tau$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R_{xx}(t-\tau)\, e^{-j\alpha(t-\tau)}dt\,d\tau \qquad , \ \eta = t-\tau$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T-\tau}^{T-\tau} R_{xx}(\eta)\, e^{-j\alpha\eta}d\eta\,d\tau$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} R_{xx}(\eta)\, e^{-j\alpha\eta}(2T-|\eta|)\,d\eta$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\, e^{-j\alpha\tau}d\tau$$