



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

مهر ۹۴

فرآیندهای تصادفی

تمرین سری دوم (مفاهیم اولیه فرایندهای تصادفی)

موعد تحویل: یکشنبه ۱۰ آبان، قبل از شروع کلاس

مدرس: مهدی جعفری

سؤال ۱ یک فرایند تصادفی گسسته-زمان X_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
یک سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر شیر آمد، به ازای همه n ها داریم: $X_n = (-1)^n$. اگر خط آمد، به ازای همه n ها داریم: $X_n = (-1)^{n+1}$.

الف) برخی از $sample\ paths$ فرایند را رسم کنید.

ب) تابع توزیع مرتبه اول X_n را بیابید.

ج) تابع توزیع توام X_n و X_{n+1} را بیابید.

د) امید ریاضی و اتوکواریانس X_n را بیابید.

سؤال ۲ فرض کنید X_1 ، X_2 و ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پواسن مستقل باشند که دارای چگالی ثابت $\lambda = 4$ هستند. فرایند گسسته $Y[n]$ به فرم زیر تعریف شده است:

$$Y[n] = \alpha^n X_1 X_2 \dots X_n, \quad n \geq 1$$

α چه مقدار باشد تا داشته باشیم: $E(Y[n] | Y[n-1] \dots Y[1]) = Y[n-1]$

سؤال ۳ فرض کنید $Z(t) = At^3 + B$ باشد که A و B متغیرهای تصادفی مستقل اند.

الف) تابع توزیع $Z(t)$ را بیابید.

ب) $m_Z(t)$ (امید ریاضی) و $C_Z(t_1, t_2)$ (اتوکواریانس) را بیابید.

سؤال ۴ اگر $X(t)$ یک فرایند حقیقی ایستا به مفهوم وسیع (WSS) با متوسط صفر باشد، WSS بودن فرایندهای زیر را بررسی کنید.

الف) $Y_1(t) = e^{jt} X(t)$

ب) $Y_2(t) = |X(t)|$

سؤال ۵ تابعی از t_1 و t_2 به صورت زیر داده شده است:

$$R(t_1, t_2) = 9 \cos(w(2t_1 - t_2)) + 16 \min(t_1, t_2)$$

الف) بیان کنید این تابع به چه دلیل مثبت معین (PD) نیست؟

ب) با تغییر کوچکی این تابع را PD کنید.

سؤال ۶ نشان دهید اگر فرایندهای $x(t)$ و $y(t)$ WSS باشند و $E(|x(0) - y(0)|^2) = 0$ ، آنگاه $R_{xx}(\tau) = R_{xy}(\tau) = R_{yy}(\tau)$.

سؤال ۷ فرض کنید $X(t)$ یک فرایند با تابع متوسط $m_x(t) = 0$ و تابع همبستگی $R_x(t + \tau, t) = e^{-t^2} \delta(\tau)$ است.

الف) آیا این فرایند از نظر متوسط (امید ریاضی) ارگادیک است (ME) ؟ چرا؟

ب) آیا این فرایند از نظر همبستگی ارگادیک است (CE) ؟ چرا؟

موفق باشید