دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

فرآیندهای تصادفی		۱۳مهر ۹۴
	تمرین سری اول (مروری بر احتمال)	
مدرس: مهدی جعفری		موعد تحویل: یکشنبه ۲۷مهر، قبل از شروع کلاس

سؤال ۱ آیا یک توزیع احتمال هم‌شانس روی یک مجموعه نامتناهی شمارا امکان‌پذیر است؟ جواب خود را اثبات کنید.

سؤال ۲ فرض کنید فضای نمونه یک آزمایش تصادفی به صورت $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ باشد.

الف) کوچکترین «سیگما فیلدی» را بیابید که شامل $\{a\}$ و $\{b\}$ باشد.

ب) همانطور که می‌دانید، بر طبق نظریه احتمالات، احتمال را برای اعضای یک سیگما فیلد تعریف می‌کنیم. به هریک از اعضای سیگما فیلدی که در قسمت قبل به دست آورده‌اید یک عدد نسبت بدهید. برای سهولت در نامگذاری مطابق زیر عمل کنید. مثلا اگر $\{a, b, c\}$ عضو سیگما فیلد باشد، احتمال نسبت داده شده به آنرا با p_{abc} نشان دهید. با استفاده از اصول موضوعه احتمالات، رابطه بین این احتمال‌ها را بیان کنید. با توجه به این روابط، حداکثر به چند متغیر «مستقل» برای توصیف این آزمایش تصادفی (نسبت دادن احتمال به همه اعضای سیگما فیلد) نیاز داریم؟
توضیح: مثلا در آزمایش پرتاب سکه، یک متغیر مستقل داریم؛ یعنی فقط نیاز داریم احتمال شیر آمدن را بدانیم. احتمال خط آمدن از روی آن مشخص می‌شود.

سؤال ۳ نشان دهید اگر $P(A|B) = P(A|B^C)$ آنگاه وقایع A و B مستقل هستند.

سؤال ۴ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با اثبات یا مثال نقض نشان دهید:

الف) A و B و C سه پیشامد هستند و $0 < P(C) < 1$. اگر A و B به شرط C از یکدیگر مستقل باشند و هم‌چنین A و B به شرط C^C هم مستقل باشند، آن‌گاه A و B مستقل خواهند بود.

ب) اگر A و B و C سه پیشامد باشند به طوری که $P(A|B) > P(A)$ و $P(A|C) > P(A)$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$P(A|B \cap C) > P(A)$$

ج) برای هر متغیر تصادفی مثل X و هر عدد $a > 0$ داریم:

$$P(|X| < a) \leq a^2 E[\frac{1}{X^2}]$$

د) اگر $E[X|Y] = 0$، آن‌گاه X و Y ناهمبسته هستند.

سؤال ۵ فرض کنید X یک متیغر تصادفی باشد که روی فضای نمونه $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ تعریف شده است؛ ثابت کنید

$$|E[X]| \leq E[|X|]$$

سؤال ۶ X و Y دو متغیر تصادفی برنولی با پارامتر p هستند و $Z = X \oplus Y$ (علامت $\oplus$ به معنای *XOR* به کار رفته). امید ریاضی Z و توزیع احتمال شرطی $P(Z|X)$ را بیابید. آیا مقادیری از p وجود دارد که به ازای آن Z و X مستقل باشند؟

سؤال ۷ مسعود ممکن است پیاده یا با اتوبوس به دانشگاه برود؛ پیاده‌روی ۳۰ دقیقه و اتوبوس ۱۵ دقیقه زمان می‌برد. زمان حرکت اتوبوس‌ها این‌گونه است که در هر دقیقه‌ی زوج ($t = 0, 2, \ldots$) به احتمال p یک اتوبوس به ایستگاه نزدیک خانه مسعود وارد می‌شود و در دقایق فرد امکان رسیدن اتوبوس نیست. از آن طرف مسعود تنها در دقایق فرد ممکن است وارد ایستگاه شود.

الف) فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته باشد که نشان‌دهنده‌ی دقایق بین رسیدن دو اتوبوس است، $E[X]$ را پیدا کنید.

ب) اگر مسعود همیشه با اتوبوس به دانشگاه برود، امید ریاضی زمانی که از او صرف می‌شود را بدست آورید.

ج) از آن‌جایی که مسعود نمی‌داند مقدار p چقدر است، با پرتاب یک سکه نحوه‌ی رفت و آمد خود را مشخص می‌کند. متغیر تصادفی گسسته Y دقایقی که طول می‌کشد تا مسعود به دانشگاه برسد را نشان می‌دهد. مقدار $E[Y]$ را محاسبه کنید.

د) N و L متغیرهای تصادفی گسسته‌اند. N نشان‌دهنده‌ی دقایق انتظار مسعود در ایستگاه اتوبوس و L نشان‌دهنده‌ی دقایقی است که از رفتن اتوبوس قبلی می‌گذرد. امیدریاضی N و L را حساب کنید.

ه) خیلی از افراد تصور می‌کنند که $E[X] = E[N] + E[L]$ ، یعنی زمان متوسط بین رسیدن دو اتوبوس برابر است با جمع زمان‌های متوسط بین رسیدن فرد در ایستگاه با رسیدن اتوبوس قبلی و بعدی. توضیح دهید که چرا چنین تصوری درست نیست.

سؤال ۸ سکه‌ای به ما داده شده که با احتمال p شیر می‌آید؛ تنها چیزی که درباره p می‌دانیم این است که به طور یکنواخت در بازه $[0, 1]$ توزیع شده است.

الف) احتمال این که در ۵ بار پرتاب سکه همه پرتاب‌ها شیر باشد را حساب کنید.

ب) احتمال این‌که پرتاب پنجم شیر باشد به شرط اینکه ۴ پرتاب قبل همگی شیر بوده‌اند را حساب کنید.

سؤال ۹ X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی *iid* هستند و $Y = X_1 + X_2$

الف) مقدار $E[X_1 - X_2|Y]$ را محاسبه کنید.

ب) مقدار $E[X_1|Y]$ (تخمین کمترین مربع خطای متوسط برای X_1) را حساب کنید. (راهنمایی: از $E[X_1 + X_2|X_1 + X_2]$ استفاده کنید)

سؤال ۱۰ اگر $X_1, X_2, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع پواسون با پارامتر ۱ باشند، با کمک قضیه حد مرکزی تساوی زیر را اثبات کنید.

$$\lim_{n \to \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

سؤال ۱۱ گراهام گرین، نویسنده بزرگ انگلیسی، در یکی از داستان‌های خود به نام *Doctor Fischer of Geneva* موقعیتی را توصیف می‌کند که m نفر در یک مهمانی حاضرند و n جعبه وجود دارد ($m < n$)، در یکی از جعبه‌ها بمب کوچکی پنهان شده و باز کردن جعبه مساوی مرگ کسی است که آن را باز می‌کند. آن m نفر مجبورند به ترتیب یک جعبه انتخاب کنند و آن را باز کنند. در این داستان این طور القا می‌شود که کسی که اول صف باشد شانس بیشتری برای زنده‌ماندن خواهد داشت، شما به عنوان کسی که بیشتر از گراهام گرین احتمال می‌دانید در این باره اظهار نظر کنید.

سؤال ۱۲ تابع چگالی احتمال توام X و Y برابرست با: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{y} e^{-(y + \frac{x}{y})}$
امید ریاضی هر کدام و کواریانس بین آن دو را بدست آورید.

سؤال ۱۳ X و Y دو متغیر مستقل نرمال استاندارد هستند. زوج (X, Y) را در صفحه مختصات در نظر بگیرد، نمایش این نقطه را با مختصات قطبی (R, Θ) می‌نامیم. توزیع احتمال حاشیه‌ای R^2 و Θ را بدست آورید.

سؤال ۱۴ یک سکه سالم را ۲۹ بار پرتاب می‌کنیم و نتیجه را به صورت رشته‌ای ۲۹بیتی در نظر می‌گیریم. تعداد دفعاتی که رشته‌ی 011101 در این ۲۹ بیت تکرار شده را X می‌نامیم. (شمارش تعداد دفعات با در نظرگرفتن همپوشانی است مثلا در 0111011101 ۲بار تکرار داریم) با نامساوی مارکف نشان دهید که با احتمال حداقل ۸۷درصد، X از ۲ بیشتر نیست.

سؤال ۱۵ X و Y دو متغیر تصادفی نمایی مستقل با پارامتر λ هستند. توزیع $Z = X - Y$ را بدست آورید. سپس مقدار $P(|Z| > 1)$ را محاسبه کنید و با تقریبی که نامساوی چبیشف از این مقدار می‌دهد مقایسه کنید.

موفق باشید