دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی	۲۶ فروردین ۱۳۹۴

تمرین سری پنجم

مدرس: مهدی جعفری — موعد تحویل: ۱۴ اردیبهشت ۱۳۹۴

۱- یک مثلث قائم‌الزاویه به وتر ۹ در نظر بگیرید اگر تابع چگالی احتمال یکی از اضلاع آن به صورت زیر باشد، امید ریاضی طول ضلع دیگر را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & 2 < x < 4 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

۲- متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی $f(x)$ است. مشخص کنید که مقدار $E[|X-y|]$ به ازای چه مقداری از y کمینه خواهد شد.

۳- در یک مهمانی n زوج شرکت کرده‌اند، در اواسط مهمانی ناگهان برق می‌رود و بعد از آمدن برق مشخص می‌شود که m نفر از افراد بر اثر سکته‌ی قلبی دار فانی را وداع گفته‌اند. با فرض اینکه تمام افراد دارای وضعیت مشابهی از نظر سلامتی بوده باشند(یعنی همه با شانس برابر ممکن بوده فوت کنند) اگر X نشان دهنده تعداد زوج‌هایی باشد که بعد از حادثه هر دوی زن و شوهر زنده مانده‌اند، باشد؛ واریانس این متغیر تصادفی را بدست آوردید.

۴- می‌دانیم امید ریاضی متغیر تصادفی X کوچکتر از صفر است($E[X] < ۰$). در صورتی که $E[e^{\lambda X}] = ۱$ و $\lambda \neq ۰$ ثابت کنیدکه مقدار متغیر λ کوچکتر از صفر است.

۵-۱- ثابت کنید اگر θ یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ باشد در این صورت ثابت کنید دو متغیر تصادفی $X = cos\theta$ و $Y = sin\theta$ ناهمبسته هستند.(از این موضوع چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟!)

۵-۲- در صورتی که داشته باشیم $Cov(X,Y) = ۰$ ثابت کنید که:

$$\rho(X+Y, X-Y) = \frac{Var(X) - Var(Y)}{Var(X) + Var(Y)}$$

۶-روش پیشنهادی زیر را برای ساختن گرافی n راسی به صورت تصادفی در نظر بگیرید:
فرض کنید p عددی در بازه $[۰, ۱]$ باشد. به ازای هر زوج از رئوس گراف با احتمال p این دو یال را به وسیله یک یال به هم متصل می کنیم.
در گراف ساخته شده با روش بالا امید ریاضی تعداد زیرگراف های $k_۶$ را محاسبه کنید.

۷- فرض کنید سکه‌ای داریم که با احتمال p شیر می‌آید.سکه را n بار به صورت مستقل پرتاب می‌کنیم.متغیر تصادفی X را برابر با تعداد پرتاب‌هایی که خط آمده و پرتاب قبلی شیر آمده است، در نظر می‌گیریم.
الف) امید ریاضی متغیر تصادفی X را محاسبه کنید.
ب) با فرض $p = \frac{۳}{۴}$ و $n = ۱۰$ واریانس X را به دست آورید.

۸- به ازای متغیرهای تصادفی گسسته‌ی X و Y و تابع f نشان دهید:
الف) $E[g(Y)X|Y] = g(Y)E[X|Y]$
ب) در صورتی که f وارون پذیر باشد داریم: $E[X|Y] = E[X|f(Y)]$

۹- کلاسی را در نظر بگیرید که اعضای کلاس را به ۳ گروه تقسیم کرده‌ایم. میانگین نمرات امتحانات دانش‌آموزان این گروه ها به ترتیب برابر با ۴۰و ۵۰و ۶۰ است. دانش‌آموزی را به طور تصادفی از این کلاس انتخاب می‌کنیم. متغیر تصادفی X را برابر با نمره ی امتحان دانش‌آموز انتخاب شده و متغیر تصادفی Y را شماره ی گروهی که دانش‌آموز در آن است در نظر می گیریم. مشاهده می کنیم که $var(X|Y=y)=5y$ است.

الف) امیدریاضی و واریانس متغیر تصادفی $E[X|Y]$ را محاسبه کنید.

ب) امیدریاضی متغیر تصادفی $var(X|Y)$ را به دست آورید.

۱۰- متغیرهای تصادفی X و Y را در نظر بگیرید. توزیع توامان این دو متغیر روی مجموعه‌ی $(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)$ به صورت یکنواخت است. واریانس متغیر تصادفی $Z=X+Y$ را به دست آورید.