

۲۲ اسفند ۱۳۹۳	آمار و احتمال مهندسی
تمرین سری سوم	
موعده تحویل: ۱۵ فروردین ۱۳۹۴	مدرس: مهدی جعفری

۱- نزدیک نوروز شده است و سهند و امیر تصمیم گرفته‌اند تعدادی ظرف سمنو تولید کنند و بین بچه‌های کلاس توزیع کنند. برای این کار آن‌ها  $n$  عدد بادام خریداری کرده‌اند و با آن‌ها  $k$  ظرف سمنو درست کرده‌اند. بعلاوه چون سهند و امیر سمنو درست‌کن‌های قهاری هستند، تعداد بادام‌ها و ظرف‌های سمنو اعداد بزرگی هستند. قرار است ۵ تا از این ظرف‌ها به استادهای دانشکده تحویل داده شوند. از آنجایی که استادهای دانشکده همگی سمنو دوس دارند، این خیلی کار بدی است که شما سمنویی را به یک استاد بدهید که در آن هیچ بادامی پیدا نمی‌شود.

(الف) چقدر احتمال دارد استادی باشد که در ظرف سمنوی او بادوم وجود نداشته باشد؟

(ب) چقدر احتمال دارد دقیقا در ظرف سمنوی سه استاد بادوم وجود داشته باشد؟

(ج) فرض کنید دو استاد از بادام بدشان می‌آید. چقدر احتمال دارد در ظرف سمنوی این استادها بادام وجود نداشته باشد و در ظرف بقیه استادها بادام وجود داشته باشد.

۲- بمبی در طبقه همکف دانشکده پیدا شده است. این بمب دارای دو سیم آبی و قرمز است و می‌دانیم برای خنثی کردن آن باید یکی از این دو سیم را قطع کنیم. همچنین می‌دانیم اگر سیم اشتباه را قطع کنیم بمب منفجر خواهد شد. هر کس در مورد این که کدام سیم را قطع کنیم نظری دارد و احتمال این که سیم اشتباه را قطع کند  $p$  است. رئیس دانشکده که فردی دموکرات است معتقد است باید بین بچه‌ها نظرسنجی کنیم و هر چه اکثریت گفتند انجام دهیم. اما مسئول کارآموزی دانشکده معتقد است باید یک نفر را به تصادف انتخاب کنیم و نتیجه کار را به دست او بسپاریم. به نظر شما به حرف کدام یک عمل کنیم تا با احتمال کمتری منفجر شویم؟

۳- احتمال این که در هر روز فروردین برف بیاید  $p$  است. شما و دوستان تصمیم گرفته‌اید بر سر این که چند روز از فروردین برف می‌آید شرط‌بندی کنید. شرط بندی به این صورت است که هر کدام یک عدد را انتخاب می‌کنید و اگر دقیقا به همان تعداد روز برف بیاید شما برنده می‌شوید. شما چه عددی را انتخاب می‌کنید؟

۴- تام و جری بر سر یک تکه ران مرغ دعوایشان شده است. از آنجایی که تام و جری اکنون بزرگ شده‌اند و دیگر دعوا از سنشان گذشته است، تصمیم گرفته‌اند جور دیگری مسئله را حل کنند. آنها تصمیم گرفته‌اند در ابتدا ران مرغ در اختیار جری باشد، سپس شروع به پرتاب سکه بکنند و هر دفعه که شیر آمد کسی که ران مرغ را در اختیار دارد آن را به نفر دیگر بدهد. فرض کنید آن‌ها  $n$  دفعه سکه پرتاب می‌کنند. چقدر احتمال دارد در نهایت ران مرغ از آن تام شود؟

۵- فرض کنید  $\frac{1}{4}$  مشتریان یک فروشگاه مرد هستند. بعلاوه فرض کنید به طور متوسط در هر ۵ دقیقه ۱۰ مشتری وارد مغازه می‌شوند. احتمال این که در بازه ۱۰:۳۰ تا ۱۰:۴۵، ۱۵ زن وارد مغازه شوند را بیابید.

۶- فرض کنید در میدان مین ای گیر کرده‌اید. می‌دانیم تعداد مین‌ها در هر ناحیه با مساحت  $R$  از توزیع پواسون با میانگین  $\lambda R$  پیروی میکند که  $\lambda$  عددی مثبت و ثابت است.

(الف) احتمال این را بیابید که فاصله نزدیکترین مین با شما حداقل  $d$  باشد.

(ب) احتمال این را بیابید که فاصله  $d$  متری شما حداقل  $n$  بمب باشد.

۷- فرض کنید  $X$  متغیر تصادفی‌ای است که از توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$  پیشروی می‌کند. عدد صحیح  $t$  را چنان بیابید که مقدار  $P(X = t)$  بیشینه باشد. (منظور از  $P$  تابع احتمال است.)

۸- فرض کنید شما در جنگلی گیر کرده‌اید و تنها دارایی شما یک تفنگ است که دو تیر دارد. همچنین می‌دانید هر چند وقت یکبار پلنگی به شما حمله می‌کند. حمله پلنگ‌ها به شما یک فرآیند پواسون با نرخ  $\lambda$  است و شما با هر تیر یک پلنگ را می‌توانید از پا در بیاورید و اگر پلنگی دستش به شما برسد شما حتما کشته خواهید شد. تلفن شما زنگ می‌زند و به شما گفته می‌شود تا چند دقیقه دیگر با هلوپتر برای کمک به شما می‌آیند و از شما می‌خواهند بیشترین زمان  $t$  را بگویند که تا آن موقع با احتمال  $\frac{1}{4}$  می‌توانید به تنهایی دوام بیاورید. شما چه عددی را اعلام می‌کنید؟ (برای سادگی محاسبات فرض کنید عددی که شما اعلام می‌کنید صحیح است.)

۹- شما برای خرید بستنی به کانکس دانشکده رفته‌اید. می‌دانید هر دفعه که یک بستنی سفارش دهید این بستنی به احتمال  $\frac{1}{3}$  شکلاتی است و به همین احتمال هم وانیلی است. شما می‌خواهید تعدادی بستنی سفارش دهید به طوری که به احتمال ۹۵ درصد هم بستنی وانیلی بخورید و هم بستنی شکلاتی. چند بستنی سفارش می‌دهید؟

۱۰- الف) دنباله ای باینری متشکل از ۱۰۰ بیت به شما داده می‌شود. سپس شما هر دو رقم متوالی این دنباله را با هم جمع می‌کنید و حاصل به پیمانه ۲ را می‌نویسید. مثلاً اگر دنباله اول ۱۱۱۰۰۱ باشد دنباله ساخته شده ۰۰۱۰۱ خواهد بود. به این ترتیب یک دنباله باینری به طول ۹۹ بدست می‌آید. ثابت کنید اگر دنباله اول به طور کاملاً تصادفی از بین همه دنباله‌های ۱۰۰ بیتی انتخاب شده باشد، دنباله جدید هم به صورت کاملاً تصادفی از بین همه دنباله‌های ۹۹ بیتی انتخاب می‌شود.

ب) حال فرض کنید در ابتدا به شما عددی تصادفی در مبنای  $k$  بدهند و شما هر  $t$  رقم متوالی را جمع کنید و به پیمانه  $k$  محاسبه کنید و به این ترتیب عددی جدید در مبنای  $k$  بسازید. اگر عدد اول تصادفی از بین همه اعداد  $n$  رقمی به پیمانه  $k$  بوده باشد، آیا عدد جدید هم عددی تصادفی از بین تمام اعداد  $n - t + 1$  رقمی در مبنای  $k$  است؟ (فرض کنید  $k \geq 3$  است.)

موفق باشید