دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی	۲۶ دی۱۳۹۳

تمرین سری ششم

مدرس: مهدی جعفری	موعد تحویل: «قبل» از شروع امتحان پایان‌ترم، این تمرین نمره امتیازی دارد.

۱- الف) اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع تجمعی F باشد و متغیر تصادفی Y به صورت $Y = F(X)$ تعریف شود ثابت کنید متغیر تصادفی Y دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی (۰،۱) است.

ب) اگر X یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی (۰،۱) باشد تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = e^X$ را محاسبه کنید.

ج) اگر X یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = 1$ باشد تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = \log X$ را محاسبه کنید.

۲-الف) فرض کنید $X_1, X_2, ...X_n$ متغیر تصادفی هایی مستقل‌اند که همگی دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی (۰،۱) می‌باشند. اگر متغیر تصادفی $Y = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$ باشد در اینصورت تابع چگالی احتمال این متغیر تصادفی را بدست آورید.

ب) یک دستگاه از n قطعه‌ی مشابه مستقل از هم که به صورت سری به یکدیگر متصل شده‌اند تشکیل شده است. فرض کنید طول عمر این قطعات از توزیع نمایی با میانگین μ پیروی کند. اگر دستگاه تا زمانی کار کند که تمام قطعات به درستی کار کنند (در صورتی که حداقل یکی از قطعات خراب شود دیگر دستگاه کار نمی‌کند) میانگین و واریانس طول عمر دستگاه را محاسبه کنید.

۳- در یک آزمایش یک سکه را به تعداد ۱۰۰۰۰ مرتبه پرتاب کرده‌ایم که از این تعداد ۵۸۰۰ بار شیر آمده، و در بقیه‌ی دفعات خط آمده است. آیا می‌توانیم ادعا کنیم که این سکه یک سکه‌ی منصف است؟ (راهنمایی: سعی کنید از تخمین زدن متغیر تصادفی دوجمله‌ای با استفاده از توزیع نرمال استفاده کنید).

۴- الف) اگر $E[X] = E[X^2]$ باشد ثابت کنید که $P(X = 0) = 0$

ب) اگر X یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین ۱۰ باشد:

- به کمک نامساوی مارکف یک کران بالا برای $Q = \{X \geq 22\}$ پیدا کنید.
- به کمک نامساوی چبیشف یک کران بالا برای Q پیدا کنید.

۵-فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. X دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $(-1, 1)$ و Y دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ی $(-4, -1)$ باشد. تابع چگالی احتمال $Z = XY$ را به دست بیاورید.

۶- فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته با توزیع $f_X(x) = 2x$ در بازه‌ی $(0, 1)$ باشد. Y متغیر تصادفی پیوسته‌ای است و توزیع احتمال شرطی Y به شرط $X = x$ روی بازه‌ی $(0, x)$ یکنواخت است. امیدریاضی و واریانس متغیر تصادفی Y را بدست بیاورید.

۷- فرض کنید دو مشتری x و y وارد بانکی می‌شوند و مدت زمان سرویس‌دهی به آنها توزیع نمایی با پارامترهای λ_A ، λ_B دارد. احتمال این را بیابید که مشتری B زودتر از A از بانک خارج شود.

۸- می خواهیم از توزیع پوآسون با پارامتر λ برای مدل‌سازی تعداد دفعات شکست یک آزمایش در یک بازه‌ی زمانی استفاده کنیم. فرض کنید در n بازه‌ی واحد زمانی تعداد دفعات شکست را شمرده‌ایم و برابر با $(x_1, x_2, ..., x_n)$ است که x_i تعداد دفعات شکست در بازه‌ی iام است.

- فرض کنید پارامتر λ توزیع پوآسون خود توزیع گاما داشته باشد. تخمین گر MAP ، $MMSE$ را برای λ به دست بیاورید.
$p(\lambda) = \Gamma(\alpha, \beta)$
- امیدریاضی و واریانس تخمین گر هایی که در قسمت (الف) به دست آورده‌اید را محاسبه کنید.
- به نظر شما کدام تخمین‌گر مناسب‌تر است؟ چرا؟