



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

۱۳۹۳ آبان ۱۵	آمار و احتمال مهندسی
تمرین سری سوم	
مدرس: مهدی جعفری	موعد تحویل: سه شنبه ۲۷ آبان

۱- سه متغیر تصادفی X_1, X_2, X_3 را که مستقل از یکدیگر هستند را در نظر بگیرید. هر یک از این متغیرها مقادیر ۱ تا ۱۰ را با احتمال مساوی اختیار می‌کند. دو متغیر تصادفی Z و Y را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$Z = \max(X_1, X_2, X_3)$$

$$Y = \min(X_1, X_2, X_3)$$

الف) تابع توزیع جرمی Z را به دست بیاورید.
 ب) تابع توزیع جرمی Z را به شرط این که Y برابر ۵ باشد به دست بیاورید.
 ۲- در هر یک از موارد زیر با فرض داشتن توزیع متغیرهای تصادفی X, Y ، توزیع $X + Y$ را به دست آورید:

الف) متغیر تصادفی X با توزیع پواسون با پارامتر λ_1 و متغیر تصادفی Y با توزیع پواسون با پارامتر λ_2
 ب) متغیر تصادفی X با توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای (n, p) و متغیر تصادفی Y با توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای (m, p)

۳- فرض کنید ما ۳۰۰۰ میلیارد تومان داریم و قیمت دلار در حال حاضر ۳۰۰۰ تومان است. ولی می‌دانیم بعد از ضرب‌العجل تعیین شده برای مذاکرات هسته‌ای قیمت دلار تغییر می‌کند، این تغییر دو حالت دارد یا با به نتیجه رسیدن مذاکرات هسته‌ای این قیمت به ۲۰۰۰ تومان کاهش می‌یابد یا به علت عدم توافق، قیمت دلار برخلاف گذشته (!) افزایش پیدا می‌کند و به قیمت ۵۰۰۰ تومان می‌رسد همین‌طور می‌دانیم امکان توافق مذاکرات و عدم توافق کاملاً برابر است.

□ در صورتی که بخواهیم که مقدار ذخیره‌ی دلاری ما بعد از اتمام این مدت حداکثر باشد باید چه رویکردی پیش بگیریم؟

□ در صورتی که بخواهیم مقدار ذخیره‌ی ریالی ما بعد از اتمام این مدت حداکثری باشد باید از چه رویکردی استفاده کنیم؟

۴- استاد اخیراً اعلام کرده‌اند که از این به بعد تصمیم گرفته‌اند که به صورت از پیش اعلام نشده در بعضی از جلسات کوییز بگیرند. از این رو تعدادی از افراد که اغلب در کلاس شرکت نمی‌کنند احساس خطر کرده‌اند، از طرف دیگر تعدادی از بچه‌ها نیز ادعا می‌کنند که می‌توانند پیش‌بینی کنند که آیا استاد در جلسه‌ی بعدی کوییز می‌گیرد یا خیر. پیش‌بینی این افراد به این صورت است که می‌گویند: استاد در جلسه‌ی بعد با احتمال p کوییز می‌گیرد.

افرادی که در کلاس شرکت نمی‌کنند برای پیدا کردن پیشگوی اصلح دست به کار شده‌اند و آن‌ها را مورد ارزیابی قرار می‌دهند به این ترتیب که در صورتی که استاد کوییز بگیرد پیشگو $(1-p)^2$ امتیاز می‌گیرد و در غیر این صورت $1-p^2$ امتیاز می‌گیرد. سپهرپیشگو از سیستم امتیازدهی باخبر شده و می‌خواهد که متوسط امتیازش را افزایش دهد. در صورتی که سپهر باور داشته باشد که استاد با احتمال p^* کوییز می‌گیرد برای اینکه امتیاز حداکثری بگیرد باید چه احتمالی (p) برای کوییز گرفتن استاد بیان کند؟

۵- اخیراً SSC جهت تامین بودجه برای برنامه‌های فوق‌برنامه اقدام به برگزاری مسابقه‌ی سکه‌اندازی کرده، به این ترتیب که فرد شرکت کننده باید ۳۰۰۰ میلیون تومان بپردازد سپس سکه‌ای منصف در اختیارش قرار می‌گیرد شروع به انداختن سکه می‌کند تا زمانی که اولین شیر بیاید، در صورتی که اولین شیر در m امین پرتاب رخ دهد فرد شرکت کننده 2^m تومان برنده می‌شود.

□ ثابت کنید متوسط میزان پولی که افراد می‌برند بینهایت است و SSC روی کاغذ نابود می‌شود.

□ با توجه به اینکه احتمالاً افراد میزان پولی محدود دارند، آیا شما حاضرید که در مسابقه شرکت کنید؟

□ در صورتی که به ازای یک بار پرداخت بتوانید هر چند مرتبه که بخواهید بازی کنید، آیا حاضر به شرکت هستید؟ توضیح دهید.

۶- الف) بیژن از بین تمام رشته‌های باینری به طول $n + m$ که شامل n تا یک و m تا صفر است یک رشته به تصادف انتخاب می‌کند و به اندازه‌ی تعداد بلوک‌های همه یک آن رشته گلابی جایزه می‌گیرد. می‌خواهیم بدانیم که بیژن احتمالاً چند تا گلابی جایزه می‌گیرد. (مثلاً اگر رشته‌ی انتخابی بیژن 11110010011001111 باشد، بیژن ۴ تا گلابی جایزه می‌گیرد).

ب) مهرداد از میان تمام جایگشت‌های اعداد ۱ تا n یک جایگشت به تصادف انتخاب می‌کند و سپس به ازای هر عدد که در جایگشت از تمام اعداد قبلیش بزرگتر باشد یک سیب به مهرداد جایزه می‌دهد. مثلاً اگر n برابر با ۶ باشد و رشته‌ی انتخابی $(3, 4, 5, 1, 2)$ باشد مهرداد ۳ سیب جایزه می‌گیرد (به ازای ۲، ۵، ۶). متوسط تعداد سیب‌هایی که مهرداد جایزه می‌گیرد چقدر است؟

۷- دو تایپیست در یک روزنامه کار می‌کنند که تایپیست A به طور متوسط ۵ غلط املایی در یک متن دارد و تایپیست B به طور متوسط ۳ غلط املایی در یک متن دارد. در صورتی که هر متن با احتمال یکسان به یکی از این دو نفر برای تایپ سپرده شود، با چه تخمینی یک متن بدون غلط تایپ می‌شود؟

۸- فرض کنید هر بیتی که روی یک شبکه‌ی کامپیوتری دریافت می‌کنید خود با احتمال p برابر با یک است. در صورتی که بیت ارسالی در مسیر با یک نویز با توزیع پواسون با پارمتر λ جمع شود در صورتی که عدد دریافتی مثبت و برابر با m باشد بهترین حدس از بیت ارسالی چه مقداری است؟ (هر عدد نماینده‌ی یک بیت است).

۹- یک سکه که احتمال شیر آمدن آن p است را آنقدر می‌اندازیم تا برای r امین بار شیر ظاهر شود. فرض کنید N نشان دهنده تعداد کل پرتاب‌های لازم باشد. مقدار $E[N]$ را بیابید. راهنمایی: یک راه ساده برای انجام این کار نوشتن متغیر N بر حسب مجموع r متغیر تصادفی هندسی است.

موفق باشید