دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی ۱۶ مهر ۱۳۹۳

تمرین سری اول

مدرس: مهدی جعفری — موعد تحویل: یکشنبه ۲۷ مهر ۱۳۹۳ قبل از شروع کلاس

۱- عملگر $-$ و Δ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

نشان دهید:

- $(A \cup B)^c \cup (A \cup B^c)^c = A^c.$
- $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c).$
- $[A \cap (A - B)^c] \cup [B \cap (A^c \cup B^c)] = B.$
- $(A \cup B) \Delta C = (A - C) \cup (B - C) \cup [(C - B) - A].$

۲- صد نفر برای بازی فوتبال ال‌کلاسیکو (رئال‌مادرید - بارسلونا) بلیط‌های شماره ۱ تا ۱۰۰ را خریده‌اند و می‌خواهند در جای خود بنشینند. این افراد به ترتیب وارد ورزشگاه می‌شوند و سر جای خود می‌نشینند. اما متاسفانه نفر اول جای خود را فراموش کرده و به صورت تصادفی در یکی از ۱۰۰ جای موجود می‌نشیند. از آن پس هر نفر درصورتی که جای خودش خالی باشد در آنجا می‌نشیند و در غیر این صورت در یکی از جاهای موجود به صورت تصادفی خواهد نشست. چقدر احتمال دارد که نفر ۱۰۰ ام در جای خود بنشیند؟

۳- اگر پیشامدهای A و B مستقل باشند آنگاه ثابت کنید:

الف) پیشامدهای A و B^c نیز مستقل هستند.

ب) پیشامدهای A^c و B^c نیز مستقل هستند.

۴- فرض کنید n پیشامد $A_1, A_2, ..., A_n$ داده شده است. میگوییم این n پیشامد مستقل هستند اگر برای هر زیر مجموعه از پیشامدها مانند $B_1, B_2, ..., B_k$ داشته باشیم:

$$P(B_1 \cap \cdots \cap B_k) = P(B_1) \cdots P(B_k)$$

حال n پیشامد مثال بزنید که هر زیرمجموعه از آن با حداکثر $n - 1$ پیشامد مستقل باشند اما همه n پیشامد مستقل نباشند.

۵- شما به همراه $n - 1$ نفر دیگر در یک مهمانی شرکت کرده‌اید. هرکدام از افراد این مهمانی از جمله شما با خود یک بسته سم دارند. قبل از صرف شام هرکس یواشکی به آشپزخانه رفته و در یکی از n ظرف غذا سم میریزد. سپس در ساعت ۱۰ شب شام سرو می‌شود و n ظرف غذا به طور تصادفی بین افراد تقسیم می‌شود. پس از ۲ ساعت، سم‌ها اثر خود را می‌گذارند و عده‌ای می‌میرند. می‌دانیم هرکس که در ظرف غذایش سم موجود باشد بدون شک خواهد مرد.

الف) چقدر احتمال دارد که همه افراد حاضر در مهمانی بمیرند؟

- ب) چقدر احتمال دارد که دقیقا یک نفر بمیرد؟
- ج) چقدر احتمال دارد که تنها یک نفر زنده بماند؟ چقدر احتمال دارد که آن فرد شما باشید؟

۶- با فرض آنکه احتمال بارش برف در امروز و فردا به ترتیب ۰.۳ و ۰.۳۲ باشد و احتمال بارش برف در فردا به شرطی که امروز برف بیاید ۰.۷ است. احتمال برف نیامدن فردا به شرط آنکه امروز برف نیاید چقدر است؟

۷- سه پیشامد A و B و C را در نظر بگیرید. میدانیم:

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{۱}{۶}$$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{۴}{۱۰}$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{۷}{۱۰}$$

مقدار $P(A \triangle B \triangle C)$ را بیابید.

۸- فردی بر روی محور مختصات در نقطه ۰ قرار دارد. این فرد در هر مرحله به احتمال p یک واحد به سمت راست حرکت می‌کند و به احتمال $۱ - p$ یک واحد به سمت چپ حرکت می‌کند.

- الف) اگر $p = \frac{۱}{۴}$ باشد چقدر احتمال دارد که این فرد زمانی به نقطه ۱+ برسد؟
- ب) اگر $p = \frac{۳}{۴}$ باشد چقدر احتمال دارد که این فرد زمانی به نقطه ۱+ برسد؟
- ج) کمترین عدد s را پیدا کنید که اگر $p \geq s$ احتمال رسیدن فرد به نقطه ۱+ برابر یک باشد.
- د) اگر $p = \frac{۱}{۲}$ باشد چقدر احتمال دارد که این فرد دقیقا بعد از ۹۹ حرکت به نقطه ۱+ برسد؟ (راهنمایی: از دنباله کاتالان استفاده کنید: فرض کنید شما در مبدا مختصات هستید و در هر مرحله یا یک واحد به سمت راست و یک واحد به بالا می‌روید و یا یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت پایین می‌روید. جمله n ام دنباله کاتالان که آن را با k_n نشان می‌دهیم برابر با تعداد حالاتی است که می‌توان از نقطه $(۰, ۰)$ با این دو حرکت به نقطه $(۰, ۲n)$ رفت به طوری که هرگز به زیر محور مختصات نیاییم. همچنین می‌دانیم $k_n = C(۲n, n)$.)

۹- دو نفر با نام‌های a و b به ترتیب با دارایی‌های A و B دلار شروع به شرط‌بندی میکنند. در هر شرط‌بندی هر کدام از افراد به احتمال $\frac{۱}{۲}$ می‌برد، بنابراین دیگری با همین احتمال می‌بازد. در هر شرط‌بندی بازنده باید یک دلار به برنده بدهد. شرط‌بندی تا جایی ادامه پیدا می‌کند که یک نفر همه پول‌های خود را ببازد. $P(A, B)$ را تعریف می‌کنیم احتمال این که a ببرد. مقدار $P(A, B)$ را محاسبه کنید. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید $P(A, B) - P(A - ۲, B + ۲) = P(A + ۲, B - ۲) - P(A, B)$ و سپس با حالت‌بندی روی زوجیت A و محاسبه $P(A, ۱)$ و $P(A, ۲)$ و $P(A, ۳)$ به روش تلسکوپی سوال را حل کنید.)

موفق باشید