



شنبه ۱۳ اردیبهشت ۱۳۹۳

آمار و احتمال مهندسی

تمرین سری چهارم

موعد تحویل: دوشنبه ۲۲ اردیبهشت، قبل از شروع کلاس

مدرس: مهدی جعفری

۱- در کلاس دیدیم که دو متغیر تصادفی X و Y را ناهمبسته می‌گوییم اگر $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ و نشان دادیم که هر دو متغیر تصادفی مستقل ناهمبسته هستند. نشان دهید که عکس این گزاره درست نیست. یعنی دو متغیر تصادفی ناهمبسته بیایید که مستقل از هم نباشند.

۲- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند (ممکن است وابسته هم باشند). متغیر تصادفی جدید Z را به این گونه تعریف می‌کنیم که یک سکه متقارن (که مستقل از X و Y است) پرتاب می‌کنیم. اگر سکه شیر آمد متغیر Z را برابر با X قرار می‌دهیم و اگر خط آمد متغیر Z را برابر Y قرار می‌دهیم.

(a) توزیع Z را بدست بیاورد.

(b) امیدریاضی Z را برحسب امیدریاضی X و Y بدست بیاورید.

(c) واریانس Z را بدست بیاورید و نشان دهید که از میانگین واریانس‌های X و Y بیشتر است. توضیح دهید چرا؟

۳- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال به شکل زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(a) مقدار c چقدر است؟

(b) تابع توزیع تجمعی (CDF) متغیر X را بیابید.

۴- نشان دهید متغیر تصادفی نمایی تنها متغیر تصادفی پیوسته بدون حافظه است.

۵- تابع مولد گشتاور توزیع نمایی را بیابید و از روی آن امیدریاضی و واریانس توزیع نمایی را محاسبه کنید.

۶- تابع مولد گشتاور توزیع نرمال (گوسی) با پارامترهای μ و σ^2 را بیابید و از روی آن امیدریاضی و واریانس توزیع نرمال را حساب کنید.

۷- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته است. تعریف می‌کنیم $p_0 = P\{X = 0\}$ به طوری که $0 < p_0 < 1$. همچنین برای امیدریاضی و واریانس X داریم $\mu = \mathbb{E}[X]$ و $\sigma^2 = \text{Var}(X)$.

(a) مقدار $\mathbb{E}[X|X \neq 0]$ را بیابید.

(b) مقدار $\text{Var}[X|X \neq 0]$ را بیابید.

تعریف واریانس به شرط وقوع واقعه A به صورت زیر است: $\text{Var}[X|A] = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2 | A]$.

موفق باشید