



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی	۲۶ بهمن ۱۳۹۲
تمرین سری اول	
مدرس: مهدی جعفری	موعد تحویل: شنبه ۱۰ اسفند ۱۳۹۲

۱- نشان دهید:

- $(A^c \cup B^c)^c \cup (A^c \cup B)^c = A$ ,
- $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ ,
- $[A \cap (B \cup C)]^c = (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c)$ .

۲- اگر  $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$  باشد، کوچکتری سیگما فیلدی که شامل دو زیرمجموعه  $\{c\}$  و  $\{a, d, e\}$  باشد را بیابید.

۳- (قائده زنجیره‌ای) نشان دهید:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_n | A_{n-1} \cap \dots \cap A_1) \dots P(A_2 | A_1) P(A_1)$$

۴- فرض کنید دو واقعه  $A$  و  $B$  متمایز هستند. در این صورت آیا این دو واقعه می‌توانند مستقل از هم باشند؟ چرا؟

۵- یک جعبه شامل  $n$  توپ است که از 1 تا  $n$  شماره گذاری شده‌اند. فرض کنید  $k$  توپ را به ترتیب از جعبه بر می‌داریم.

- احتمال اینکه  $m$  بزرگ‌ترین عددی باشد که از جعبه بیرون آورده شده چقدر است؟
- احتمال اینکه بزرگ‌ترین عددی که از جعبه بیرون آورده شده کمتر یا برابر با  $m$  باشد چقدر است؟

۶- بازی زیر با تاس را در نظر بگیرید. یک بازیکن دو تاس را می‌اندازد، اگر جمع اعداد 7 یا 11 باشد او می‌برد و اگر جمع اعداد 2، 3 یا 12 باشد او می‌بازد. در غیر این صورت جمع اعداد هر عدد دیگری باشد او آنقدر به انداختن تاس‌ها ادامه می‌دهد تا جمع اعداد همان عدد قبلی شود (که در این صورت بازی را می‌برد) یا اینکه عدد 7 بیاید (که در این صورت بازی را می‌بازد). احتمال اینکه این بازیکن بازی را ببرد چقدر است؟

۷- برای وقایع دلخواه  $A_1$  تا  $A_n$  نشان دهید:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

راهنمایی: می‌توانید از رابطه  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  و استقرای ریاضی استفاده کنید. به عنوان راه حلی دیگر اول می‌توانید نشان دهید  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n B_i$  به طوری که  $B_1 = A_1$  و  $B_i = A_i \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j^c$  سپس از خاصیت سوم تابع احتمال استفاده کنید.

۸- زندان بانی به سه زندانی اطلاع داده است که یکی از آنها به صورت تصادفی برای اعدام انتخاب شده است و دو نفر دیگر آزاد خواهند شد. زندانی الف به زندان بانی می‌گوید که چون می‌داند که دست کم یکی از دو زندانی دیگر آزاد خواهند شد، اگر زندان بانی به صورت خصوصی به او بگوید که کدامیک از دو زندانی دیگر آزاد خواهند شد اطلاع اضافی به او نداده است. زندان بانی به این پرسش پاسخ نمی‌دهد و استدلال می‌کند که اگر زندانی الف بداند که کدامیک از دو زندانی دیگر آزاد می‌شوند آنگاه احتمال اعدام شدن الف از  $1/3$  به  $1/2$  افزایش می‌یابد. شما با منطق زندانی موافق هستید یا زندانبان؟ چرا؟

۹- دو سکه داریم؛ سکه اولی متقارن است ولی سکه دومی هر دو رویش شیر است. یکی از سکه‌ها را به طور کاملاً تصادفی انتخاب می‌کنیم و دو بار می‌اندازیم. اگر در هر دو پرتاب شیر ظاهر شود احتمال اینکه سکه متقارن انتخاب شده باشد چقدر است؟ اگر شیر در بیست پرتاب متوالی ظاهر شود احتمال اینکه سکه متقارن انتخاب شده باشد چقدر است؟

۱۰- فرض کنید  $n$  نامه برای  $n$  نفر تایپ شده است و آدرس این  $n$  نفر نیز بر روی  $n$  پاکت مجزا نوشته شده است. فرض کنید که نامه‌ها را کاملاً به طور تصادفی داخل پاکت‌ها قرار دهیم. احتمال اینکه «لااقل» یکی از نامه‌ها در پاکت درست قرار گیرد چقدر است؟ این احتمال را برای  $n = 7$  و برای  $n \rightarrow \infty$  حساب کنید.

موفق باشید