به نام خدا

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

آمار و احتمال مهندسی	شنبه ۲۴ اسفند ۱۳۹۲

تمرین کامپیوتری سری اول

مدرس: مهدی جعفری	موعد تحویل: جمعه ۲۲ فروردین ۱۳۹۳، ساعت ۱۲ شب

- پاسخ تمرین را در یک فایل فشرده با نام MatHw1-StudentNumber به ایمیل course.mjs@gmail.com ارسال کنید.
- فایل مورد نظر علاوه بر کد قسمت‌های مختلف سوال، همچنین باید حاوی گزارشی تایپ شده در مورد تمرین‌ها (نتایج محاسبات، رسم نمودارها، پاسخ به سوال‌ها و ...) باشد. فرمت فایل مورد نظر باید پی‌دی‌اف باشد. دقت کنید در موقع ایجاد فایل پی‌دی‌اف، فونت‌های لازم را هم داخل فایل قرار دهید.
- در مورد هر تمرین، کد برنامه را هم داخل گزارش خود بنویسید.
- توجه کنید شاید تمرین به نظر طولانی بیاید! ولی قسمت عمده آن توضیحات می‌باشد.

قانون اعداد بزرگ

۱- در این تمرین می‌خواهیم قانون اعداد بزرگ را به صورت تجربی بررسی کنیم. به این منظور متغیر تصادفی گسسته X را با توزیع یکنواخت در نظر بگیرید به طوری‌که

$$X \in \{1, \dots, 100\}$$

و

$$\Pr[X = k] = \frac{1}{100}, \quad \forall k \in \{1, \dots, 100\}.$$

(a) امید ریاضی X را با μ نمایش می‌دهیم. مقدار μ را بیابید.

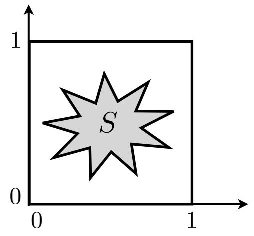
(b) حال از متغیر تصادفی X به تعداد n بار نمونه می‌گیریم (آزمایش تصادفی را n بار انجام می‌دهیم). مقادیر به‌دست آمده را $\{x_1, \dots, x_n\}$ می‌نامیم و میانگین تجربی آن‌ها را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x}_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

در یک نمودار مقدار $\bar{x}_n$ را برحسب n های مختلف (مثلا تا $n = 10000$) رسم کنید. همینطور مقدار امید ریاضی X را هم در «همان» نمودار رسم کنید. مشاهده کنید که برای n های بزرگ مقدار $\bar{x}_n$ به مقدار μ میل می‌کند.

(c) برای تولید اعداد تصادفی به دو شیوه می‌توان عمل کرد. روش اول اینکه به تعداد ماکسیمم مقداری که لازم داریم در ابتدای برنامه عدد تصادفی تولید کنیم (مثلا 10000 تا) و بعد در هر مرحله n تا عدد اول را در نظر بگیریم و میانگین تجربی آن‌ها را محاسبه کنیم. در روش دوم به ازای هر n تعداد n عدد تصادفی جدید تولید می‌کنیم و میانگین تجربی آن‌ها را محاسبه می‌کنی. علی‌الصول نتایج این دو روش نباید با هم تفاوت داشته باشند. آیا واقعا اینطور است؟ اگر تفاوتی وجود دارد دلیل آن چیست؟

راهنمایی مطلب: با استفاده از دستور $\text{randi}(T_{max}, M, N)$ می‌توانید یک ماتریس $M \times N$ بسازید که درایه‌هایش با اعداد تصادفی صحیح که به طور یکنواخت بین 1 و T_{max} توزیع شده‌اند، پرشده است.



شکل ۱:

شبیه‌سازی مونت‌کارلو

در تمرین ۲ و ۳ با «شبیه‌سازی مونت‌کارلو» آشنا می‌شویم. شبیه‌سازی مونت کارلو یک روش برای محاسبه احتمال، امید ریاضی، و در حالت کلی انتگرال‌هایی است که به صورت مستقیم قابل محاسبه نیستند یا توسط روش‌های معمول محاسبه آن‌ها بسیار دشوار است. شبیه‌سازی مونت‌کارلو در فیزیک، ریاضیات، مهندسی، بیولوژی، اقتصاد و ... کاربرد زیادی دارد. به طور خاص این روش برای حل مسائل زیر استفاده می‌شود: بهینه‌سازی، انتگرال‌گیری عددی، نمونه‌برداری از یک توزیع آماری.

به طور خلاصه این روش عبارت است از محاسبه «امید ریاضی» به صورت میانگین تجربی تعدادی آزمایش تصادفی که به صورت مستقل انجام شده باشند. به بیان دقیق‌تر، فرض کنید که متغیر تصادفی X را داریم و می‌خواهیم عبارت $\beta = \mathbb{E}\left[\varphi(X)\right]$ را حساب کنیم که در آن φ یک تابع دلخواه (از برد متغیر تصادفی X به اعداد حقیقی) است. به این منظور، شبیه‌سازی مونت‌کارلو N نمونه مستقل از هم $x_1, \ldots, x_N$ از متغیر تصادفی X می‌سازد و مقدار β را به صورت زیر تخمین می‌زند:

$$\hat{\beta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(x_i).$$

توجه کنید که اگر علاقه‌مند به «محاسبه احتمال» واقعه $\{X \in A\}$ باشیم، در این صورت تابع φ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi(x) = 1_{\{x\in A\}} = \begin{cases} 0 & x \notin A, \\ 1 & x \in A, \end{cases}$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\beta = \mathbb{E}\left[\varphi(X)\right] = \mathbb{E}\left[1_{\{X\in A\}}\right] = \mathbb{P}\left[X \in A\right].$$

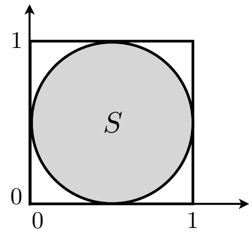
۲- (محاسبه انتگرال) فرض کنید همانند شکل ۱ یک ناحیه پیچیده S داخل مربعی به شعاع واحد قرار دارد. هدف ما یافتن مساحت ناحیه مورد نظر است. در چنین حالتی (وقتی که ناحیه مورد نظر پیچیده باشد) یافتن مساحت شکل مورد نظر با استفاده از انتگرال‌گیری کار بسیار دشواری است. همینطور اگر ابعاد فضا به جای ۲ عدد بیشتری بود (مثلا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰) در این صورت برای انتگرال‌گیری عددی احتیاج به تعداد نمایی بازه (نمایی بر حسب ابعاد فضا) می‌داشتیم.

شبیه‌سازی مونت‌کارلو روش ساده‌ای را برای این‌کار در اختیار ما قرار می‌دهد. به این منظور تعدادی نقطه به طور تصادفی و یکنواخت داخل مربع شکل ۱ انتخاب می‌کنیم و تعداد نقاطی که داخل ناحیه S می‌افتند را می‌شماریم. به این ترتیب می‌توانیم تخمینی برای مساحت ناحیه S به‌دست بیاوریم.

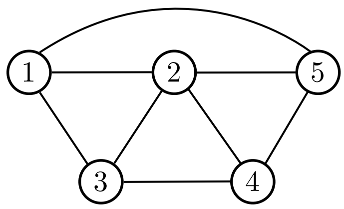
(a) با توجه به توضیحی که در بالا داده شد، امید ریاضی $\mathbb{E}\left[1_{\{(X,Y)\in S\}}\right]$ (که در آن X و Y متغیرهای تصادفی مربوط به مختصات افقی و عمودی نقطه تصادفی انتخاب شده است) بیانگر چه کمیتی است؟

(b) حال فرض کنید ناحیه S مطابق شکل ۲ یک دایره باشد. با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو می‌توان تخمینی برای مساحت دایره و در نتیجه تخمینی برای عدد «پی» یافت. برنامه‌ای بنویسید که اینکار را انجام دهد. به این ترتیب عدد پی را حدودا تا چند رقم اعشار می‌توان محاسبه کرد؟ برای اینکار به تولید چند نقطه تصادفی نیاز داریم؟ با استفاده از برنامه‌ای که نوشته‌اید در این مورد توضیح دهید.

راهنمایی: در مطلب با استفاده از دستور rand می‌توانید یک عدد تصادفی در بازه $(0,1)$ به صورت یکنواخت انتخاب کنید.



شکل ۲:



شکل ۳:

۳- (ولگشت بر روی یک گراف) فرض کنید ولگردی بر روی یک گراف (مثلا گراف شکل ۳) یک ولگشت تصادفی به این صورت می‌زند: در زمان t او در هر راسی از گراف که باشد تعداد همسایه‌های آن راس را در نظر می‌گیرد و به صورت کاملا تصادفی و یکنواخت یکی از همسایه‌ها را انتخاب می‌کند و برای زمان بعدی (یعنی زمان $t+1$) به آن راس می‌رود.
فرض کنید متغیر تصادفی X_t نشانگر راسی از گراف شکل ۳ است که ولگرد در زمان t در آن قرار دارد (برای افراد علاقه‌مند: دنباله متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, X_3, \ldots$ به اصطلاح یک «زنجیره مارکوف» می‌سازد. برای توضیحات بیشتر می‌توانید به ویکی‌پدیا مراجعه کنید). با استفاده از خواص زنجیره مارکوف، می‌توان اثبات کرد که در مثال ما توزیع متغیرهای تصادفی X_t بعد از گذشت زمان به اندازه کافی طولانی، به سمت یک توزیع خاص (که به خواص گراف بستگی دارد میل خواهد کرد). این توزیع به نقطه شروع ولگشت بستگی ندارد و بعد از گذشتن مرحله گذار، احتمال حضور ولگرد ما در راس‌های گراف به یک توزیع خاص میل خواهد کرد. در این تمرین می‌خواهیم با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو این توزیع را تخمین بزنیم.

(a) با فرض اینکه ولگرد در زمان $t = 1$ در یکی از راس‌های گراف قرار دارد (مثلا در زمان شروع در راس 1 قرار دارد) برنامه‌ای بنویسید که یک نمونه تصادفی از X_{100} تولید کند.

(b) حال برنامه قسمت قبل را به تعداد زیاد (مثلا 10000، 50000 و یا بیشتر) اجرا کنید. به این ترتیب و با توضیحاتی که در مورد شبیه‌سازی مونت‌کارلو در بالا داده شد توزیع ولگرد را در زمان $t = 100$ تخمین بزنید. چند نمونه از توزیع‌هایی را که به دست آورده‌اید در گزارش ذکر کنید (دقت کنید که به علت تصادفی بودن چنین روشی، در هر بار اجرا به نتیجه‌ای متفاوت دست پیدا می‌کنیم).

(c) نشان دهید (به صورت تقریبی) که توزیع به دست آمده در قسمت قبل به نقطه شروع ولگشت بستگی ندارد.

(d) اگر بجای $t = 100$ توزیع ولگرد را در زمان‌های $t = 5$ و $t = 200$ تخمین بزنیم چه تغییری در توزیع به‌دست آمده به‌وجود می‌آید؟ دلیل آن چیست؟

(e) آیا با استفاده از تقارنی که گراف شکل ۳ دارد می‌توانید توزیع دقیق ولگشت را (بعد از طی شدن زمان طولانی) حدس بزنید؟

برای افراد علاقه‌مند: در مثال ولگشت بر روی گراف، امکان اینکه توزیع نهایی را به صورت دقیق محاسبه کنیم وجود دارد و در عمل احتیاجی به استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو نیست! برای این‌کار باید ماتریس «گذار احتمال» (transition matrix) را برای گراف مورد نظر تشکیل دهیم و «بردار ویژه» نرمالیزه شده مربوط به مقدار ویژه 1 را برای این ماتریس بیابیم. این بردار ویژه برابر است با توزیع نهایی ولگشت.

موفق باشید